2012 第 期

数学教学

SHUXUE JIAOXUE

中华人民共和国教育部主管

ISSN 0488-7387




【编者按】第十二届国际数学教育大会(ICME 12)于2012年7月8日在韩国首尔召开，并在开幕式上颁出了国际数学教育委员会(ICMI)第四、五届的克莱因奖和弗莱登塔尔奖．至此，共有10位杰出数学教育家获此殊荣，他们是：Guy Brousseau(法国，2003年克莱因奖)；Celia Hoyles(英国，2003年弗莱登塔尔奖)；Ubiratan D'Ambrosio(巴西，2005年克莱因奖)；Paul Cobb(美国，2005年弗莱登塔尔奖)；Jeremy Kilpatrick(美国，2007年克莱因奖)；Anna Sfard(以色列，2007年弗莱登塔尔奖)；Gilah Leder(澳大利亚，2009年克莱因奖)；Yves Chevallard(法国，2009年弗莱登塔尔奖)；Alan Schoenfeld(美国，2011年克莱因奖)；Luis Radford(加拿大，2011年弗莱登塔尔奖)．本刊在2008年第10期介绍过2007年的两位获奖者，本文译自评奖委员会对2011年两位得奖者的介绍．

ICMI–2011克莱因奖和弗莱登塔尔奖获得者

——美国Alan Schoenfeld教授和加拿大Luis Radford教授介绍

200241　华东师范大学数学系　周　丹　李俊译校



2011年菲利克斯·克莱因(Felix Klein)奖授予美国加州大学伯克利分校的阿兰·舍菲尔德(Alan Schoenfeld)教授，以表彰他30多年在数学教育研究和发展的不懈努力和杰出的终身成就．Alan Schoenfeld在他职业生涯的早期就对数学教育产生了浓厚的兴趣，并很快成为数学问题解决、数学思考、数学的教与学领域的先驱和领导者．他的学术著作显示出他对了解数学学习的本质和发展以及不同学段的数学教学有着执着的追求和不凡的贡献．1970年代后期他开始着手研究数学问题解决，到1980年代中期他又将研究兴趣扩大到数学教学和教师能力方面．他的工作开创了这些领域的研究和理论发展，并对这些领域的后续研究有着深远影响．Alan Schoenfeld也在评价、数学课程、数学教育的多元性、研究方法论和教师教育等领域，把理论与实践联系起来，做了许多基础理论与应用的工作，他的工作受到国际跨学科学者的认可，他在数学教育、数学、教育研究以及教育心理学方面有超过200篇高引用的出版物．他的获奖有很高的含金量，表达了来自数学、科学、教学和教育管理部门多年来大家对他研究工作的赞赏与认可．

Alan Schoenfeld的另一重要成就是他带出了一大批在数学教育研究领域内很有影响的国内外研究生和年轻学者，他为国内外的教育、数学和数学教育提供了丰富而又优秀的研究成果．他活跃于国内外的专业研究协会，参与联合研究项目，受邀在全球各地的众多会议上作大会报告．

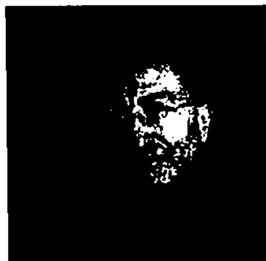
Alan Schoenfeld最初是一个研究数学的学者，1968年，他获得纽约皇后学院数学学士学位后，1969年在斯坦福大学获得数学的硕士学位．然后，他在斯坦福大学继续攻读数学博士学位，1973年，获得博士学位．毕业后他先后在加州大学戴维斯分校和伯克利分校担任讲师，在伯克利分校期间，他对数学教育研究产生了兴趣，从此开始了他数学教育职业生涯．

1978–1984年, 他先后在哈密尔顿学院和罗切斯特大学工作, 并于1985年受邀重返加州大学伯克利分校组建数学教育研究小组, 两年后被聘为教授. 现在他是数学系教育方向的名誉主席和教授. 自1994年, Alan Schoenfeld也担任英国诺丁汉大学的特聘教授.

Alan Schoenfeld杰出的工作和献身工作的精神使他成为教育、数学和数学教育界一些知名专业协会的领导. 1994年, 他当选为全美教育学会院士, 1995年当选为其执行委员会成员, 2001年当选为副主席. 从1997年至2000年, 他就任美国教育研究协会(AERA)主席. 另外, 他也对促进数学教师专业发展作出了重要贡献, 比如他负责起草了全美数学教师委员会(NCTM)于2000年颁布的《学校数学的原则和标准》高中标准部分.

当然, 要列出Alan Schoenfeld的很多著作是不可能的, 这里仅指出一些, 如1985年引用率很高富有创见的《数学问题求解(Mathematical Problem Solving)》; 1992年《数学教与学研究手册》中关于认知与元认知的一章"学会数学地思考——数学的问题解决、元认知和感知(Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics)"; 1993年与Smith和Arcavi共同撰写的对某个复杂的数学想法的发展和学习所作的严谨的研究《学习(Learning)》; 1998年在《教育问题》上发表的细致而翔实的关于教师决策的研究"通向情境教学的理论(Toward a theory of teaching-in-context"以及他2010年的一本书, 名为"我们如何思考(How We Think)". Alan Schoenfeld的那些有创见的理论贡献无疑都是建立在他一系列精心设计的实验和深刻分析数据基础之上的.

总之, Alan Schoenfeld赢得2011年Felix Klein奖当之无愧.



2011年汉斯·弗莱登塔尔(Hans Freudenthal)奖授予加拿大Laurentienne大学教育科学学院的Luis Radford教授, 以表彰他20年来在其开创和发展出来的研究领域所作的缜密的理论探索和持续不懈的努力, 该研究成果已经对学术界产生了重大影响. 他提出的"符号-文化学习理论"源于他对数学史的兴趣, 运用了认识论、符号学、人类学、心理学和哲学理论, 也基于他对课堂中学生如何学习代数的细致观察. 他的研究已经获得了数个奖项, 在许多著名的科学期刊、专业书籍和研究手册中可以找到, 他本人也多次获邀在国际会议上做大会报告. Luis Radford的研究项目在代数的教与学领域影响尤其重大, 他的理论和实践工作为这一领域提供了一种重要的新视野, 也为更广泛的数学教育研究界贡献了一种全新的可普遍运用的学习理论.

Luis Radford工作的影响还体现在他给意大利、西班牙、丹麦、哥伦比亚、墨西哥以及巴西研究生开展的许多辅导活动中, 同时, 他有一些以其研究影响为主题的研讨会, 这些研讨会影响着教师、教师教育工作者、课程开发人员, 以及地区和国家的教育部代表. 他的学术成就也为他赢得了国际声誉, 他受邀参与了2008年在罗马召开的国际数学教育委员会(ICMI)一百周年纪念大会"国际数学教育委员会一百年(1908–2008): 数学教育的回顾与塑造"的程序策划. 另外, 他曾担任过《数学学习(For the Learning of Mathematics)》杂志的副主编, 现为《数学教育研究(Educational Studies in Mathematics)》杂志的副主编.

1977年Luis Radford在危地马拉圣卡洛斯大学获得土木工程学士学位, 1978至1980年留校在工程学院数学系任教, 而后赴法国Louis Pasteur I大学学习, 并于1981–1983年先后获得该校"数学及基础应用"和"数学教学高级研究"文凭, 1985年获得数学教学博士学位. 之后他重返危地马拉并成为圣卡洛斯大学人文学院的副教授. 1992年他移居加拿大并成为Laurentienne大学教育学院的教授.

Luis Radford的研究计划和理论构思始于20世纪90年代初, 那时他在规划一个从社会文化角度考察用历史认识论研究学习的作

(下转第11–29页)

学生在函数图像变换中所遇困难的探究及对策

215500 江苏省常熟市教师进修学校 沈 易

在高一的函数教学结束后，针对学生学习情况所作的调研中，笔者发现有如下问题：

问题1 将函数$y=x^2-4x-5$的图像向右平移2个单位，再作出平移后图像关于直线$x=-1$的对称图形，求出所得到图像对应的函数解析式.

尽管已经学习了函数图像变换的一般结论，但部分学生仍使用了类似于方法I的解答：

方法I：函数$y=x^2-4x-5$图像的顶点为$(2,-9)$，过点$(0,-5)$. 向右平移2个单位后，图像的顶点为$(4,-9)$，过点$(2,-5)$. 这两个点关于直线$x=-1$的对称点分别为$(-6,-9)$和$(-4,-5)$，由此得到所求函数的解析式为$y=x^2+12x+27$.

在51名学生中，有16人使用了上述的方法(其中两人计算错误)，其余则试图使用函数图像变换的一般性结论.

方法II：函数$y=x^2-4x-5$的图像向右平移2个单位，得$y=(x-2)^2-4(x-2)-5$，即x^2-8x+7. 它的图像关于直线$x=-1$的对称图形函数为$y=(-2-x)^2-8(-2-x)+7$，即$y=x^2+12x+27$.

尝试此方法的35名学生中，有21人给出了正确的解答(有6人使用前一种方法处理对称变换)，3人出现了计算错误，1人颠倒了两次变换的顺序，5人在处理向右平移2个单位时将函数$y=f(x)$变为$y=f(x+2)$，7人无法正确处理对称的情况(有2人在处理平移和对称的情况时都出现了错误).

由此例即可看出学生在解决函数图像变换问题时所遇到的困难. 本文以过程性概念的理论为出发点，对造成此困难的原因进行探究，并试图给出对更多学生而言有效的教学策略.

"过程性概念(Procept)"理论由Eddie Gray和David Tall共同提出，该理论认为，很多代数中的概念具有双重性：既可以被看作某一个过程，也可以在一个更高层次的过程中作为一个整体被操作. 过程性概念包括三个成分：一个产生数学对象的过程，由此过程所产生的数学对象，以及可以同时表示这两者的符号. 若以函数概念为例，符号$y=f(x)$，$x\in A$，$y\in B$既代表了给定自变量求出对应函数值的计算过程，也可以被看作一个整体，参与到更高层次的过程如复合、求导中.

如图1所示，学习者对于代数中概念的理解一般是从具体程序(Procedure)阶段开始；当他们能够认识到不同程序的共性，并利用这些共性增加解题的灵活性，就达到了过程(Process)阶段；若学习者能在此基础上更进一步，可以将此过程看作被更高层次程序所操作的对象，并能根据需要，自如地在过程与对象两者之间转换，则其已初步达成了对此过程性概念的理解.

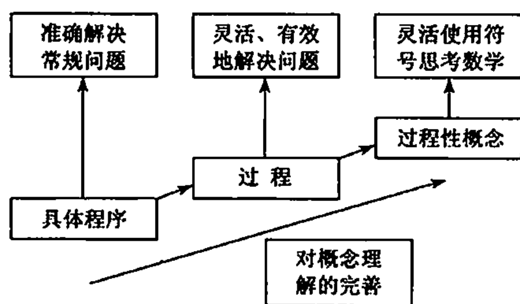


图1

以函数为例，大部分学生尚未达到过程性概念阶段，他们能较为自如地推导单个函数的各项性质，但只能遵循固定的步骤来处理包含多个函数的问题. 在处理函数图像变换的问题中，处于具体程序阶段的学生只能按照固定的方向，参照记忆中的结论解决常规问题. 对于"已知原来的函数和变换，求变换后的函数"与"已知变换和变换后的函数，求原来的函

数", 学生把它们看作不同类型的问题. 当学生达到过程阶段时, 他们能够理解不同的变换程序的实质, 如"将函数图像向右平移2个单位, 再作出关于直线$x=-1$的对称图形"和"作出函数图像关于直线$x=-2$的对称图形"具有相同的作用. 同时, 对于诸如求变换前后的函数也能将其作为一类问题进行处理. 这种认识不仅可以建立在观察函数图像的基础上, 也可以利用特定的工具帮助学生从对应法则的角度认识到这一点, 这将在稍后进行讨论.

过程性概念的理论认为, 符号具备表示过程和对象的双重功能, 这一特性在确保解题过程中思维灵活性的同时, 也为初学者带来较大的障碍. 若初学者对某个概念的理解仅停留在过程阶段, 则在解题中可能面临需要协调多个过程的窘境. 如图2, 在处理函数图像变换问题时, 若学生只能将函数看作一个由x求出y的计算步骤, 则其每次变换涉及: 已知函数、待求函数和函数图像的变换. 在此情况下, 学生首先要接受一个过程——图像变换, 且输入量和输出量都是过程(函数)这一陌生的事实, 而非熟悉的数量. 其次, 需要协调这三个过程的地位和相互作用, 这对学生有限的工作记忆提出了较高的要求. 若问题中出现横、纵坐标都有变化的情况, 则问题会变得更加复杂. 如果从对应法则的角度, 将函数看作一个可以被操作的整体, 则此类问题就是点的对应关系的自然扩展: 由点的对应关系, 将一个对象转化为另一个对象, 整个解答可得到简化, 如图3所示. 更进一步, 若学生对函数的认识能够达到过程性概念的阶段, 他们就会发现, 图像的变换本身就可以看作一个函数, 它与熟知的以数为输入、输出量的函数在本质上是相同的, 且

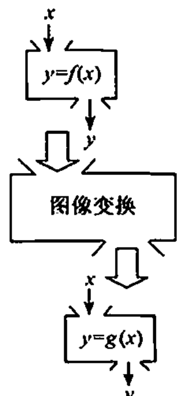


图2

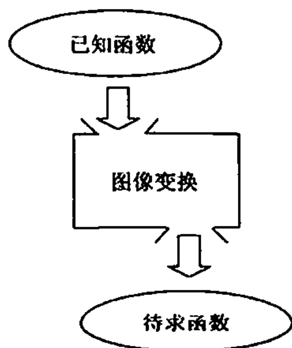


图3

可以进行类似的运算, 如复合、求逆等.

除了难以将函数看作一个可以被整体处理的对应法则外, 还有其他因素增加了学生在解决此类问题时的困难.

其一为学生对函数各种表征的认识层次不同, 和由此造成的表征间转化的障碍. 根据David Tall的研究, 学生在函数的图像表征方面的认知层次低于符号表征. 受平面几何学习中的经验影响, 学生更多地将函数的图像当作一个整体, 而忽略了其本质上表达一种对应关系. 因此, 在处理问题1时, 部分学生选择一些特殊位置作为问题的入手点. 在访谈中, 这些学生承认, 使用特殊点是一种"觉得比较安全"的方法. 但此方法局限于解决与熟识图像有关的问题. 如前面所述的16名学生, 在将问题1中的函数变为$y=x^3+|x|+1$时, 有7人使用他们认为"不太可靠"的函数图像变换的一般结论得出了正确结果, 3人得出错误结果, 剩余的6人中有4人在将此函数写成分段函数后无法继续, 2人则试图描绘函数图像, 并通过取特殊点后使用待定系数法求未知函数的表达式, 但均未获成功. 成功地解决函数图像变换问题, 要求学生对函数的两种表征方式(符号的和图像的)有较深刻的认识, 并能熟练地将一种表征方式给出的条件或结论转化为另一种表征方式. 如在问题1之后的另一次测试中, 出现的问题2.

问题2　已知$y=x^2-8x+7$, 当$P(x,y)$为$y=f(x)$图像上一点时, $Q(-2-x,y)$为函数$y=g(x)$图像上一点, 求函数$y=g(x)$的解析式.

面对这一问题, 51名学生中仅有6人给出正确的结果. 注意到此问题实际上是问题1的后半部分, 学生茫然的原因在于"这道题好像没有讲过". 由此可以看出, 大部分学生尚不具备在不同表征间自如转化的能力, 他们解决函数图像变换问题时, 主要依靠的是对常见问题的模仿.

其二, 学生在处理函数图像变换问题时受到自身概念意象的影响. "概念意象(Concept Image)"由David Tall和Shlomo Vinner提出, 指在头脑中与某个概念有关的所有形象、性质和过程所组成的认知结构. 我们可以推测,

在解决函数图像沿x轴正方向平移2个单位的过程中，以下部分的概念意象被激发：在$y=f(x)$的表达式中，x代表相应点的横坐标；同时，当某个图像沿x轴正方向平移2个单位时，图像上所有点的横坐标+2；既然如此，$y=f(x)$的图像经过平移，难道不是$y=f(x+2)$的图像吗？正由于此，学生往往机械地记忆：当函数图像沿着x轴方向平移和伸缩变换时，这些变换在解析式中引起的变化，是"反过来的"．这就是学生在处理沿着x轴方向的变换过程中遭遇较大困难的原因．值得一提的是，根据目前各省、市的高考要求，反函数的概念或减弱或删去，因此，在教学中缺乏足够的机会向学生说明函数图像沿着两条坐标轴方向的变换，其本质上具有相同的规律．

当学生面对困境时，他们往往有两种应对方式．首先，寻找某种自认为有效的替代性方法．如部分学生在解决问题1时，利用问题中的函数为熟悉的二次函数这一条件，通过在抛物线上取特殊点的方式求得最终结果．但如前文所述，这一策略的局限性显而易见．而且，即使在部分问题中此种方法有效，只满足于寻求特殊方法的运用，将使学生丧失一般性解法的训练机会．其次，当学生发现自己无法理解某个概念和相关的推导过程时，他们的要求往往是"告诉我怎么做"！而由于紧张的教学进度和不断进行的各类考试，教师也更乐于直接告诉学生如何做，而不是花费时间让学生理解这么做的深层次原因．以目前高中数学教学的目标，工具性的理解无可厚非，但由此造成的后果是学生的解答过程只能按照某种固定的模式开展，而缺乏对整个解答过程的把握能力．如在沿着x轴的平移变换中有如下结论：当$a>0$时，$y=f(x+a)$的图像是将$y=f(x)$的图像向左平移a个单位所得到．以问题3.1为例．

问题3.1　函数$y=-\dfrac{5}{2x}$的图像经过怎样的平移，得到函数$y=\dfrac{5}{-2x+1}$的图像？

始终有不少的学生仅仅注意到原来出现x的位置出现了$x+1$，因而给出解答：向左平移1个单位．而另一类错误则与变换的先后顺序有关，如问题3.2．

问题3.2　函数$y=\ln x$的图像经过怎样的变换，得到函数$y=\ln|x+1|$的图像？

部分学生的解答中常将对称与平移的次序颠倒．由于这两类错误的常见性，相应的问题经常得到训练和评讲．但实际的情况是：虽然此类错误的发生频率经过密集训练会有明显减少，但时隔不久即会产生较大的反弹．相比问题1，问题3.1和3.2在计算上显得比较简单，但在各次测试中，类似问题的错误率都高于问题1．这说明，当问题不再呈现"已知函数和变换，求变换后的函数"这一常见模式时，对学生而言，逆转常见的固定思路给出解答，将带来额外的困难．这是学生缺乏对于问题的整体把握的表现，根据前文中过程性概念理论的分析，这些学生尚处于具体程序阶段．

由以上分析可以看到，若学生对于函数图像变换的理解停留在工具性层面，则针对解题过程的整体掌控和解题的灵活性等方面均有较大的缺失．此外，根据过程性概念理论，为了克服学生在函数图像变换时的困难，不可避免地要求他们至少能初步地将函数看作一种对应关系，而非一个计算过程．因此，即使在有限的教学时间内，关于函数图像变换的教学只能以"观察少量简单情况→快速归纳→得出一般结论"的形式开始，但在随后的教学中应尽可能促使学生理解这些规律的内涵，这是可以做到的．因此，下面的探求是有意义的：在教学中寻找一种辅助学生解题的工具，使其能够表示问题中出现的各种对应关系，同时能够结合学生的概念意象使之发挥正确的作用，还必须便于使用，以尽可能减少学生使用自创的不规范方法．

基于以上探究和教学实践，笔者感到借助高等代数中用于表示对应关系的交换图，是一种有效的方法．以图4来表示函数图像变换的解题思路：在三个对应关系中已知其二，求出剩余的对应关系．图5则为将函数$y=f(x)$的图像向右平移a个单位的交换图．通过简单介

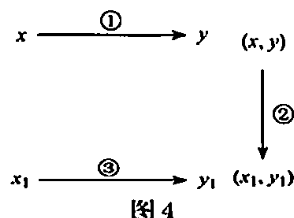


图4

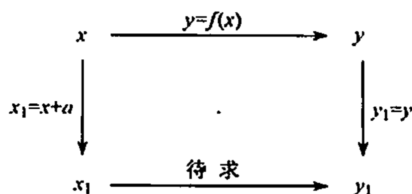


图5

绍，这样的表示方法容易被学生理解和接受.

使用交换图后，函数图像的各种变换所对应的解析式的改变，都可以从点的位置变换出发快速推导获得，这将为学生的概念意象正确发挥作用提供一个平台，也可以在一定程度上避免对于固定结论的死记硬背和生搬硬套. 其次，这也为函数两种表征方式的衔接提供了更好的机会. 再者，交换图的使用也有助于学生对整体解答过程的把握，以问题1中的变换为例，其条件如图6(1)所示，若通过消元可得交换图6(2)，这提供了一种不经过中间状态，直接求出两次变换后结果的解题途径. 更重要的是，这将促使学生认识到两种表述方式不同的变换实际的等价性. 根据过程性概念的理论，这有助于学生从具体程序阶段到过程阶段的转变.

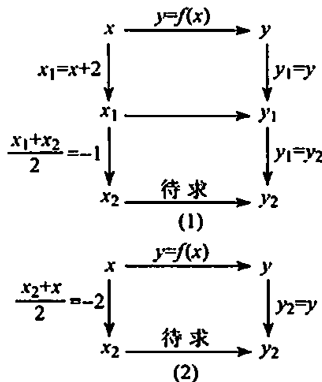


图6

交换图的作用笔者已经在教学实践中得到了一定的验证：在高二下学期数学新课末《矩阵与变换》有关内容的教学中，笔者首次尝试用交换图来分析问题中已知曲线、变换关系和未知曲线之间的联系，并要求学生在作业解答过程中必须画出相应的交换图. 在随后开始的高考第一轮复习中，学生对于有关函数图像变换问题解答的正确率呈现出显著的提高，且错误率反弹现象基本消失. 这固然源于两者具有相同的本质：对应关系的变换. 但从另一个角度看，也证明了大部分学生能够意识到这两者之间存在的共性. 笔者在下一届高中数学教学中，尝试在高一函数教学中就使用交换图来处理函数图像变换问题，在之后的测试中，同样面对问题1，全班48名学生中有7人使用方法I求解，其余41名学生中有30人使用方法II，并得出了正确结果. 对于问题2、3，学生在初次接触类似问题时的表现，相比上一届学生未有明显差异，但随后正确率呈现出稳步上升的态势，与上一届学生有明显差异.

笔者体会到在高中函数教学中借助交换图是可行的. 通过这样的表示，学生可以理解函数图像变换的实质，继而通过练习掌握函数图像变换问题的基本解题思路；这也为他们理解函数是一种对应法则，并将其看作能被整体处理的对象提供了更大的可能性.

参考文献

[1] David Tall. Facets and Layers of the Function Concept. Proceedings of PME 20. 1996.

[2] David Tall. From School to University: the Transition from Elementary to Advanced Mathematical Thinking. The Australasian Bridging Conference in Mathematics at Auckland University New Zealand on July 13th. 1997.

[3] David Tall. The transition to formal thinking in mathematic. Mathematics Education Research Journal, 2008, 20(2): 5-24.

[4] Eddie Gray & David Tall. Success and Failure in Mathematics: The Flexible Meaning of Symbols as Process and Concept. Mathematics Teaching, 1992(14): 6-10.

[5] Marcelo C. Borba & Jere Confrey. A student's construction of transformations of functions in a multiple representational environment. ESM, 1996, 31(3): 319-337.

[6] Shlomo Vinner. Concept Definition, Concept Image And The Notion of Function. IJMEST, 1983, 14(3): 293-305.

数学概念与生活概念异同性分析及教学探索*

325035 浙江省温州大学数学与信息科学学院 方均斌
325000 浙江省温州外国语学校 曾小豆

众所周知, 数学源自生活, 很多数学都与生活有着千丝万缕的关系, 但一经抽象自成体系后, 就可能和生活含义出现差异. 例如: "上底"、"下底"是人们依据生活中视觉信息加工习惯采用的文字表述, 但在数学中, 为了不产生逻辑混乱, 必须摆脱感性, 进行"理性定义", 结果出现了信息加工"矛盾"的现象. 《青年报》以《"1倍租金"怎么理解 房东房客打起"数学官司"》为题[1], 对"应付1倍的租金"演绎了数学与生活不同加工的典型官司. 同样, 我们通常认为球是圆的, 但在一些数学教师眼里, 这个结论却是错的. 近几年一些初涉讲台的数学教师经常与我们探讨数学概念的教学问题, 其中很大一部分都是由于混淆了生活概念与数学概念之间的关系.

1. 数学概念与生活概念的异同性

1.1 "源自"生活的一些数学概念探析

数学离不开生活, 把数学建立在学生已有的认知结构上, 有助于学生理解数学, 但处理不当, 会给一些学生的数学学习造成困扰.

1.1.1 生活语义"更改之后"的数学概念

有些数学概念源自生活, 但经数学上重新定义后, 其意义存在差异甚至截然不同.

例如, 在生活中, "上"、"下"是人们根据物体在人们处于现实空间的"上方"及"下方"而定义的, 然而, 数学中梯形的上底及下底, 台体(圆台、棱台)的上底及下底不是根据物体摆放的位置而确定的, 而是指度量值相对小的为"上底", 另一则称为"下底". 学生在刚开始学习的时候, 受老师的指点, 可能概念清楚, 但过一段时间后, 由于接触这些数学概念的机会少了, 学生又会被生活概念"同化", 导致数学概念认识的模糊.

又如: "合并同类项"中的"合并"及"同类"均源自生活. "合并"一词按照字面上的意思是"结合到一起", 生活中的"同类"属于一种依据一定的分类标准下的用词. 我们曾经看过两位老师的相关授课视频, 其中一位老师说: "2只兔子与3只狮子不能合并, 因为它们不是同类项." 无独有偶, 另一位老师说: "3只苹果和4个李子不能合并, 因为它们不是同类水果." 结果就遭到观摩视频的职前教师异议, 有师范生说: "狮子把兔子吃了, 也可以理解为一种合并." 也有师范生说: "2只兔子与3只狮子可以合并为5只动物, 这也可以是一种合并." 同样, 也有人认为: "3只苹果和4个李子可以合并为7个水果."

除此之外, 还有不少的概念, 如"加"、"减"、"距离"、"角"、"侧面"、"底"等有关在生活用语中频繁出现却在数学上经过严格定义的数学概念, 假如没有认真界定, 一些游离于数学概念与生活概念理解之间的争议在所难免.

1.1.2 思维角度"悄然变化"的数学概念

有些数学概念, 尽管生活用语的原意与数学中的含义几乎一致, 但数学源于生活却往往"高于"或"异于"生活.

例如, "垂直"这个概念, 生活中常常与人们视野中的"与地面垂直"的表象挂钩, 人们一谈到"垂直", 脑海里优先出现"铅垂"的形象. 假如有一个问题的条件是"已知 $l \perp m$, ……" 人们优先想到的往往是图1的情况, 然后才是图2及图3的情况.

*基金项目: 2011年温州大学面向基础教育立项重点课题——基于数学文化探究的初中数学概念教学及案例分析(WDZD201105)

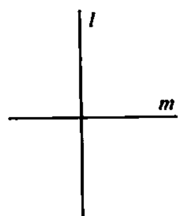


图1

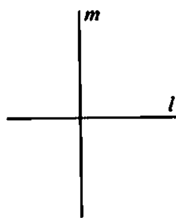


图2

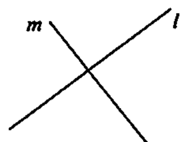


图3

类似地，如果看到条件"$\triangle ABC$是直角三角形"、"四边形$ABCD$是直角梯形"、"$\triangle ABC$是等腰三角形"、"四边形$ABCD$是等腰梯形"学生往往优先作出的图形分别是图4，图5，图6，图7．当学生看到图8，图9，图10，图11时，往往会觉得"别扭"．

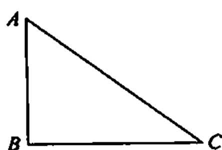


图4

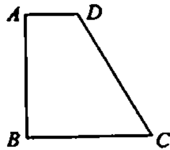


图5

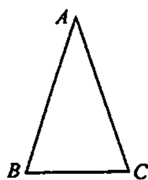


图6

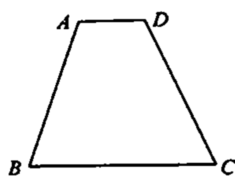


图7

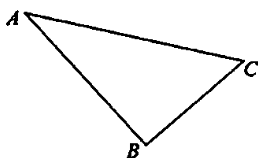


图8

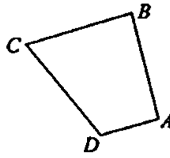


图9

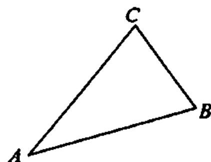


图10

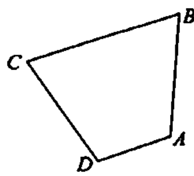


图11

一些诸如"垂直"、"高"、"底"、"柱"、"腰"、"顶点"等与生活概念差异不大的概念，因人们长期生活中所形成的阅读及视觉习惯的影响，往往具有优先的"图式效应"，但在数学学习及问题解决中，有时必须得根据具体情况，灵活选择具体的位置，克服一些无益于问题灵活解决的思维习惯．

1.2 "拿自"生活的一些数学概念探析

对一门学科(而非"科学")而言，其语言叙述往往首先沿用其生活用语描述，这些"拿来"的词语并非都是经过严格定义的，有一种"约定俗成"的味道．可是，对一向以追求严谨而著称的数学学科，一旦"较真"起来，恐怕会"麻烦不断"，甚至不知所措，连一些老教师可能也不知道问题的症结所在．

例如，有一次，一位老师在授课的时候，讲到"平面内的一条直线把平面分成两部分，……．"就有一位学生站起来："老师，这条直线是不是平面的组成部分？这条直线该属于哪部分？我觉得一条直线把平面分成三部分，这条直线应该是独立的一部分．"这位老师无言以对，觉得这位学生讲得蛮有道理．无独有偶，我国著名数学教育家张奠宙先生讲到有一位老师向他谈起一个问题："锐角三角形的高把三角形分为两个直角三角形，那么，高线该属于哪个直角三角形？"其实，我们数学教师使用了生活用语"分割"，但并不加定义地省略而简化为"分"字，这与数学本身赋予含义的集合"分类"中的"分"字混在一起而导致概念的混淆．

又如，"规律"一词在数学上没有严格定义，属于生活中的"舶来品"．有一次，一位数学新老师在批改作业"按规律填空：0, 3, 8, 15,（ ），（ ）"的时候，发现有个学生填的是"(0)，(3)"，于是就打了个"╳"，结果引起了该生的抗议："我认为四个数进行循环也是一种规律，为什么错了？"老师说："这个问题的规律本意是每项的项数平方再减去1，要填的数依次是(24)，(35)，你这是强词夺理，按照你的意思，随便什么数都可以填？"这个学生红着脸嘀咕着："是嘛！本来就如此！"巧的是，我们也遇到关于数列的一个争议问题，一位实习生问："数列1, 2, 3, 4, 5, 6中，5是这个数列的第几项？"本文第一作者脱口而出："当然是第5项！"而后马上警觉地问这位实习生："你为什么问这个问题？"这位学生回答："我觉得课本并没有对数

列顺序进行定义, 这样, 也可以从右到左数数, 因此, 5也可以认为是这个数列的第2项. 因为汉字阅读以前也有从右到左的习惯." "按照你的意思, 这个数列中的所有项都可以称为第一项, 因为以前汉字也有从上往下读的习惯!"

在数学教学中, 一些看似披着严格定义"外衣"的概念, 其实很多都经不起推敲, 这是由其学科特点(并非科学特点)所决定的, 一些老师特别是年轻教师往往不太清楚, 以为这些是数学上的严格定义, 一旦较真起来, 往往搞不清楚问题的症结所在. 我们不妨再多举几个例子:

(1) 在温州的一所中学, 有两位老师在争议: "$x = 1$是方程吗?"争议的起因就是课本似乎有严格的定义: "含有未知数的等式叫做方程."[2] 其实, 这个定义中的"未知数"却是一个"因人而异"的概念. 在生活上, 其含义应该指"目前尚不清楚其结果的数", 其中一位老师认为"$x = 1$中x的值非常清楚, 根本不是未知数, 而是已知数, 故这个等式不是方程." 的观点就出于此.

(2) 生活中, "集合"一词用得较多的是动词, 如"大家集合了". 在数学课本中, 使用"集合"一词作为名词表示"一些特定的对象的全体", 高中课本也"正儿八经"地写道: "一般地, 我们把研究对象统称为元素, 把一些元素组成的全体叫做集合."[3] 但千万不要以为这个是集合的严格定义, 就字面上来说, 该"定义"中用了生活中的词: "一些", 这是一个含糊的词语. 比如用语"所有的"、"一切"等表示全体的用语能否属于"一些"所描述的范畴? 如果不行, 何以描述自然数集、实数集等一些无限元素所组成的集合? 如果属于, 那么: "以一切集合为元素的集合是否存在?"这个"连环套"问题导致了数学上的"第三次危机". 后来, 人们就把"集合"概念当作像"点"、"直线"、"平面"等一样的"元概念", 也就不再"纠缠"了.

(3) 一位实习生在上对数函数的概念时, 他先通过抽象得到了对数函数的"概念": "一般地, 我们把函数$y = \log_a x (a > 0$, 且$a \neq 1)$叫做对数函数, 其中x是自变量, 函数的定义域是$(0, +\infty)$." 而后, 他就给学生进行"概念辨析教学": "下列函数中, 哪个是对数函数?"具体指出的有这么三个函数需要判断: "$y = \log_3(2x)$"、"$y = 2\log_3 x$"、"$y = \log_3 x + 1$". 该"定义"中, 用了一个让很多学生感到困惑的生活用语"一般地", 按照这个意思, 似乎应该有"特殊地"的"情况". 其实, 按照我们的理解, "一般地"是个概括性语言, 是进行"外延式定义"的用语. 在数学学科概念教学中, 也有一些很难(作为学科, 有时也是不必要的)采取绝对严格化的"内涵式定义", 故采取"外延式定义", 即通过一些具体的对象进行"抽象", 然后来个"一般地"进行描述. 值得指出的是, 采取"外延式定义"的"数学概念"有时很难"辨析", 因为有时讲不清楚. 就像"人"这个"概念"就属于"外延式定义"的, 我们做了一辈子的"人", 但似乎永远讲不清楚"什么是人?"这位实习生就遇到了麻烦, 因为他无法讲清楚: "所给的三个函数为什么是或不是对数函数?"

其实, 数学是一门科学, 但我们的教学更多的是把其看做学科, 大量采取生活用语等手段来进行数学概念教学, 只要有助于学生形成正确的概念及表象即可, 大可不必"纠缠", 这是我们数学教师所必须清楚的.

2. 对数学概念教学"生活化现象"的几点应对建议

数学教育老前辈陈重穆、宋乃庆两位老师曾经撰文强调数学教学要"注重实质, 淡化形式"[4], 认为数学教学应该抓住关键的问题进行, 不要纠缠于支根末节. 我们认为, 一些生活用语在数学上使用一旦约定俗成, 就不要进行纠缠, 一旦学生提起, 教师就要讲明道理, 但教师不能"搬弄是非"而干扰学生的"数学学习主流". 那么, 本文是否有"无病呻吟"之嫌呢? 我们不那么认为, 数学教学过程中, 我们如果离开生活用语将寸步难行, 可一旦使用这些生活用语后, 特别是一些生活概念性用语, 按照数学科学角度上看, 可能出现"漏洞百出"的现象, 针对这些现象, 我们大可不必"惊慌失措", 尤其是一些年轻教师, 以下是我们的三点建议.

2.1 合理用好"生活概念"

"生活概念"是学生学习数学概念的"基础", 学生在学习数学概念之前, 只能凭已有的生活经验去理解"数学概念". 我们很多数学

概念的用词也正是基于这样的考虑, 把一些生活概念“移植”过来, 主要的策略有这样的几点:

一是取名与生活用语相同或相似, 以便让学生更容易凭已有生活经验去理解. 例如, “平行”、“相交”、“交点”、“焦点”、“端点”、“顶点”等概念的用词很形象, 学生一看就很清楚, 这些数学概念学习和理解起来毫不费力. 可以这样认为, 我国中小学数学概念用语在设计的时候就很好地利用了生活用语或生活概念, 大大利于学生的数学学习. 然而, 这些起源于生活用词最好经过“定义”或者“说明”等方式“确认”, 避免不必要的误会.

二是没有直接说明, 就运用生活用语或概念来描述数学教学, 这些用语有些已经属于“行内约定”而大家“心知肚明”, 只要不影响数学教学的顺畅进行也就“顺其自然”了. 例如: “连接”、“联结”、“联接”、“连结”这四个词语都是“连”、“联”与“接”、“结”的组合问题, 意义相近, 即使有人对此进行“辨析”, 很多老师也不以为然, 因为这种表达大家不会产生多大歧义, 不太影响数学的正确交流, 也就无所谓了, 然而, 假如有人用“链接”来表示“两点确定的线段”, 估计可能就会有老师提出“抗议”: “‘链接’是网络词语, 不能用在这个场合！”一些用词为了避免不必要的争议, 可以采取补救措施. 比如“规律”一词, 很难在数学上给予“定义”, 一些诸如“看规律填空”的问题(如前面我们提到例子), 教师可以补充“请说明你的理由”即可.

三是沿用生活概念或用语的处理手法, 采取一种“同化”的手段处理一些概念问题, 这些概念往往是属于“元概念”、“外延式”描述的概念或一些没有必要严格定义的概念, 这些概念只要学生能够形成正确的表象即可. 可以这样认为, 这些概念很大一部分是为了降低概念学习的要求, 教师无需提高要求. 例如, 初中教材中所涉及的大量的几何体(如: 直棱柱、圆柱等)应该涉及到其概念的本意(直接或间接涉及到线面垂直概念), 基本上是没有严格定义的. 我们认为, 初中的“立体几何”处理方式“生活化味道”很浓, 这或许既是一种“无奈之举”, 也是一种教学策略.

2.2 清醒认识“概念差异”

数学概念沿用了大量的生活用语或就建立在生活概念之上, 这是为了帮助学生更有效学习的一种策略. 作为一名教师(尤其是职前教师), 应该对此有一个清醒的认识, 一旦我们陷入某些概念及其用词上认识模糊, 应该要很快找到争议的症结. 为此, 我们有以下的几点建议:

一是扩充生活知识面, 积累生活经验. 有一次, 我们问一些老师: “‘函数’一词在汉语中的字面意思是什么？”结果无人能答, 本文第一作者就自作聪明地望文生义: “‘函’在汉字中具有‘寄信’的意思, 那么, ‘函数’就是像寄信一样, 把一个数从一个地方寄到另一个地方.”无独有偶, 章建跃老师在其文章[5]中也提及类似想法: “据称是借用了‘函——信函’的意蕴: 传递和交流信息的书面形式, 引申为(有序的)对应关系. 因此, 函数不是一种数, 而是一种对应关系.” 后来, 笔者的研究生申报课题《高中数学必修课本数学关键名词考据》中查阅资料时找到解释: “‘函数’一词是拉丁文‘function’一词的翻译. function原义有官吏的意思. y是x的函数, 因为它必须服从x的命令, 正像每个官吏必须服从皇帝的命令一样. 我国对函数一词的使用是从清代数学家李善兰开始的, 他在《代数学》译本(1859)中, 把function译为‘函数’, ‘凡式中有天, 为天之函数’, 我国古代以天、地、人、物表示未知数x, y, z, w, 所以这个函数定义相当于: 若一式中含有x, 则称为关于x的函数. ‘函’有包含的意思(我国古代‘函’与‘含’可以通用). 这正是李善兰用函数一词翻译function的原因.”[6] 看来, 几乎每一个数学名词背后都有其“历史”, 我们数学教师做一些考证, 以扩充我们的知识面还是很有必要的. 同样, 诸如一些“富含历史意义”的数学名词: “幂”、“指数”、“对数”、“几何”、“有理数”、“无理数”等等, 在学生刚接触的时候, 如果能够作些介绍, 把其“牢牢地附着”在学生的“认知结构上”, 有助于学生对概念的理解.

二是主动反思数学概念用语, 明辨含义异同. 数学中, 不少概念的词语表述很形象, 但使用不当也容易产生一些解读上的差异. 例如, 我们在引导初中生解读“抛物线”概念的时候, 就要从“二次函数$y = x^2$的图像是一

条关于y轴对称, 过坐标原点并向上伸展的曲线, 像这样的曲线通常叫做抛物线."[7] 的描述时, 要有意识地引导学生把其与物理概念"抛物线"相挂钩, 不要隔断数学概念与物理概念的联系. 又如, "双曲线"一词很形象: "两支中心对称曲线的组合." 但在目前教材中, 这个名词似乎被"反比例函数"(初中) 及"平面上到两定点的距离差的绝对值为定值的动点轨迹"(高中) 所"独占", 像函数$y=x^{-3}$及曲线$\frac{x^4}{a^4}-\frac{y^4}{b^4}=1\ (a>0,\ b>0)$等的图像恐怕就享受不了被称之为"双曲线"的待遇了! 故当我们遇到一些与"双曲线"形似的曲线, 就不要冠以"双曲线"的称呼了, 以免混淆.

三是要关注字面含义引发的思维差异, 避免思维定势. 数学上很多数学名词 (例如: 平行、垂直、顶点、侧面、底面等) 都是使用生活常用名词进行形象描述, 然而, 一些名词一旦使用到数学上, 思维发生了一些细微变化, 我们教师应该洞察, 避免学生的思维定势. 例如, "长方形"这一名词, 在生活用词上的理解就不应该包括正方形, 而在数学上则将其"囊括", 学生受生活概念的影响, 在数学问题解决中, 经常把"正方形"排除在"长方形"之外. 又如, 三角形有三个顶点, 但数学上受生活上"山峰的顶点"影响又给等腰三角形赋予了"等腰三角形顶点"的含义: "两腰的公共点", 于是, 另外两个"顶点"就只能退出原有称呼而"忍气吞声"地被称之为"底边上的两个端点". 这里, 我们不妨摘录一道数学练习题: "如图12, 小正方形的边长为1, 若以A为顶点的等腰直角三角形的面积为$\frac{5}{2}$, 且三角形的顶点都在格点上, 这样的三角形有几个? "结果有学生将诸如图13的三角形也数进去了. 因为他们不清楚"顶点"概念发生了变化.

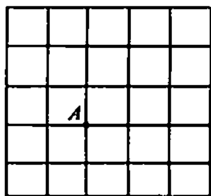


图12

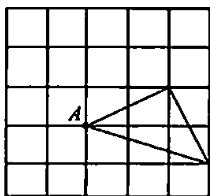


图13

2.3 密切关注"文化背景"

我们这里所提的生活概念其实是与我们国人文化背景密切关系的. 数学作为科学而言, 是一门追求严谨甚至是"绝对严谨"的学科, 即便有如此的"高目标", 我们也很难做到"绝对严谨", 数学上的"三大危机"就印证了这一点. 人们现在还在担心, 下一波的数学危机会是什么样的问题. 而数学作为一门学生学习的学科, 追求严谨是一种教学策略, 是对学生思维的一种训练. 然而, 针对"数学认知结构尚未完善"的学生而言, 这一切的做法是需要策略的, 运用学生已有的知识经验和生活经验学习数学概念是一种很好的措施, 这也是建构主义所提倡的. 事实证明, 我们的一些做法很不错. 例如: 我们给学生学习多边形的概念: 三角形、四边形、五边形、……, 学生几乎不费吹灰之力就把这些概念"牢牢地附着在认知结构上", 这是我们汉语的优势, 而转化为英文, 学生的学习就要多增加记忆的负担了. 我们如果能够把汉语上的"音"、"形"、"义"等很好地运用到数学概念教学上, 那么我们就能够实现"数学教学效率"的最大化问题, 这就要尽量排除汉语上的"音"、"形"、"义"所产生的"负迁移"效应, 以免干扰学生的数学学习. 为此, 我们认为, 数学教师应该形成一个正确的数学观念: "用好汉语, 为高效的数学教学服务." 特别是对一些新教师, 要避免在汉语使用中对数学教学尤其是概念教学所产生的种种干扰. 同时, 我们也需要关注数学语言的"舶来品": 英文及希腊字母、阿拉伯字母等在数学学习中的积极作用, 很多数学概念, 借助符号表达就很清晰地传递数学信息. 例如: 函数的单调性概念, 借助数学符号表达就非常明确, 但很抽象, 而汉语"单调"能够引导学生联想. 相信我们数学教师应该也能够很好地运用汉语的形象及符号的抽象, 采取各种语言在数学教学中优势互补的教学策略, 使我们的数学教学尤其是数学概念这一"数学基石及脚手架"的教学实现"效率最大化", 让我们的学生在学习数学过程中享受各种文化优势熏陶的同时, 也在不知不觉中接受各种文化之间的"合作"及"博弈"的教育.

(下转第11-44页)

善学得通解 善思悟妙解

——对一道典型例题的教学后的思考

311100 浙江省杭州市余杭第二高级中学 肖罗保
311100 浙江省杭州市临平职业高级中学 邓丹

1. 问题的缘起

笔者在讲解直线与椭圆的位置关系时，选择了这样一道典型例题：

例1 已知椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$，过点 $P(2,1)$ 作一条弦，使弦被点 P 平分，求此弦所在的直线方程.

在课堂教学时，当大部分学生都在埋头苦算时，一位学生在悠闲地看着其他同学，还不时瞄向老师. 教学经验告诉笔者，这个平时学习优秀的学生肯定有什么奇思妙解，笔者问："你有解题思路吗？"这位学生说出了如下的巧妙解法：如图1，观察椭圆的图像可知，直线恰好经过椭圆的顶点 $A(4,0)$、$B(0,2)$，即点 $P(2,1)$ 是线段 AB 的中点，则经过这两点的直线方程的截距式为：$\frac{x}{4}+\frac{y}{2}=1$，整理得 $x+2y-4=0$，即为所求的直线方程. 课堂上，笔者首先充分肯定了这位同学的想法，然后通过改变点 P 的位置，寻找本题的通解通法. 课后，笔者对这堂课进行了反思.

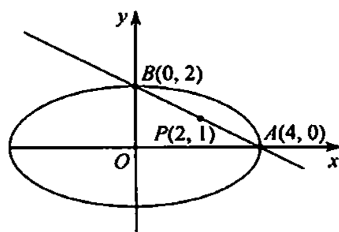


图1

一方面，固然，笔者在选择例题时，忽视了这位学生所考虑的特殊情形，但另一方面，我们在平时教学中，能否给学生一个平台，让学生的创造性思维有所发展呢？让学生通过学习和思考，觉得数学好学又"好玩"呢？

笔者觉得，善学者尽其理，善思者悟其道. 善于学习者，通过孜孜不懈的努力，能学习到解决问题的通解通法，善于思考者，必然删繁就简，抓住数学本质进行思考，悟得其中的奥秘，善学和善思结合起来，才能觉得数学好学又"好玩".

2. 善学得通法，善思悟妙解

孔子曰：学而不思则罔，思而不学则殆. 钱穆先生注，学而不思，不深辨其真意所在，必致迷惘无所得；思而不学，则事无验证，疑不能解，将危殆不安. 故"学"与"思"当齐修并进，不可偏废，即善于学习者，能学到通解通法，这种通解通法也是教学中必须浓墨重彩落实的地方，也是每个学生都要掌握的根本大法，它是解题的根本. 而善思者，则在掌握了通解通法后，再进行深层次的思维活动，抓住数学问题的本质，细读深思，将解法达到最优化.

例1的通解通法是联立方程，消元，再根据根与系数的关系和中点坐标公式得到直线的斜率. 除了通法之外，本例题还可以有点差法和交轨法，解法如下.

解法一：当直线的斜率不存在时，易知不合题意，故直线的斜率存在. 设直线与椭圆的交点为 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$，所求的直线方程为 $y-1=k(x-2)$，代入椭圆方程整理得 $(4k^2+1)x^2-8(2k^2-k)x+4(2k-1)^2-16=0$，则 $x_1+x_2=\frac{8(2k^2-k)}{4k^2+1}$. 因为弦 AB 的中点为 $P(2,1)$，则 $x_1+x_2=\frac{8(2k^2-k)}{4k^2+1}=4$，解得 $k=-\frac{1}{2}$. 所求的直线方程为 $y-1=$

$-\frac{1}{2}(x-2)$, 即 $x+2y-4=0$.

评注: 此法运算量较大, 但这是学生最容易想到的通解通法.

解法二: (点差法) 设直线与椭圆的交点为 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$, 则代入椭圆方程

$x^2+4y^2=16$ 得

$$\begin{cases} x_1^2+4y_1^2=16, & \cdots\cdots① \\ x_2^2+4y_2^2=16, & \cdots\cdots② \end{cases}$$

①-②得

$$(x_1^2-x_2^2)+4(y_1^2-y_2^2)=0, \cdots\cdots③$$

因为弦 AB 的中点为 $P(2,1)$, 即

$$\begin{cases} x_1+x_2=4 \\ y_1+y_2=2 \end{cases},$$

代入③式整理得 $k=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{1}{2}$, 再由点斜式得直线的方程为 $y-1=-\frac{1}{2}(x-2)$, 即 $x+2y-4=0$.

评注: 点差法在求直线的斜率时, 方便快捷, 运算也简单. 但是此法的技巧性较强. 善于思考者, 抓住本题的关键所在, 通过删繁就简, 得到直线的方程.

解法三: (交轨法) 设直线与椭圆的一个交点为 $A(x,y)$, 另一个交点为 B, 因为弦 AB 的中点为 $P(2,1)$, 则点 B 的坐标必为 $(4-x,2-y)$, 又因为点 A、B 都在椭圆上, 即满足椭圆的方程, 代入得

$$\begin{cases} x^2+4y^2=16, & \cdots\cdots① \\ (4-x)^2+4(2-y)^2=16, & \cdots\cdots② \end{cases}$$

则①-②得 $x+2y-4=0$, 因为过点 A、B 的直线只有一条, 即为 $x+2y-4=0$.

评注: 交轨法在求解直线方程时独树一帜, 此法在求两圆的相交弦的直线方程时也曾经使用过, 学生也不难理解. 在教学的过程中, 只要善于启发和类比, 学生对此法还是可以掌握的. 善于思考者, 才能悟得其道.

3. 善思追求的境界是把结果"看"出来

善于深入思考者, 能抓住问题的本质, 把题目的结果"看"出来,这顺应了以能力立意的高考命题原则; 体现了"多一点想的, 少一点算的"的命题理念. 把题目的结果看出来, 不是追求数学的高难度技巧, 而是追求对数学本质的深入思考. 只有理解了数学的本质,理清了知识之间的内在联系,才能做到八方联系, 浑然一体.

例2 (2011年全国高考江西理科卷) 若椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的焦点在 x 轴上, 过点 $\left(1,\frac{1}{2}\right)$ 作圆 $x^2+y^2=1$ 的切线, 切点分别为 A、B, 直线 AB 恰好经过椭圆的右焦点和上顶点, 则椭圆方程是______.

善于思考者, 结合图像(如图2), 先求 k_{OD}, 再得到 k_{AB}, 然后求出直线方程及其和 y 轴的交点 E, 最后得到椭圆的标准方程是 $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$.

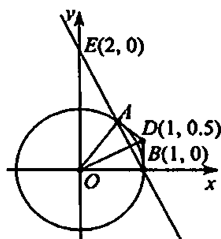


图2

例3 圆 $(x+1)^2+(y-1)^2=1$ 关于直线 $x-y-1=0$ 对称的圆的方程是( )

(A) $(x-2)^2+(y-2)^2=1$;

(B) $(x+2)^2+(y-2)^2=1$;

(C) $(x+2)^2+(y+2)^2=1$;

(D) $(x-2)^2+(y+2)^2=1$.

此题如果用通法来求解, 必须先求出对称圆的圆心坐标. 然而作为一道选择题, 我们只要仔细思考和观察, 根据草图, 就不难得出, 第二象限的点 $(-1,1)$ 关于直线 $x-y-1=0$ 对称的点是在第四象限的点 $(2,-2)$, 因此选 (D).

例4 (2008年全国高考浙江理科卷) 如图3, AB 是平面 α 的斜线段, 点 A 为斜足, 若点 P 在平面 α 内运动, 使得 $\triangle ABP$ 的面积为定值, 则动点 P 的轨迹是( )

(A) 圆; (B) 椭圆;

(C) 一条直线; (D) 两条平行直线.

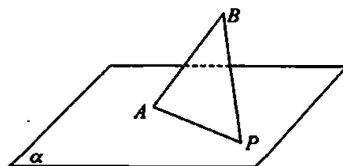


图3

追求自然合理的教学设计

——从两角和与差的余弦公式的教学谈起

201600 上海市松江二中 张忠旺

两角差的余弦公式是推导其他三角公式的基础, 也是教学中的难点. 其主要困难在于对公式结构的猜想和证明. 笔者参阅了许多文献, 发现在公式的猜想环节有两种处理方法: 一是由于公式结构的复杂性, 只进行了简单的分析, 没有得出与公式结构有关的信息; 二是猜想公式结构的教学设计牵强. 如文[1]在猜测公式时, 通过推导 $\cos 75^\circ = \cos 45^\circ\cos 30^\circ - \sin 45^\circ \sin 30^\circ$ 来引出公式. 不禁要问, 当得出 $\cos 75^\circ = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ 时, 为什么会去验证 $\cos 75^\circ = \cos 45^\circ\cos 30^\circ -$

分析: AB 是定值, $\triangle ABP$ 的面积为定值, 则动点 P 到直线 AB 的距离是定值. 在空间中, 到直线 AB 的距离为定值的轨迹是圆柱面, 则平面 α 与此圆柱面的交点即是动点 P 的轨迹, 如图4, 即动点 P 的轨迹是椭圆, 因此选(B).

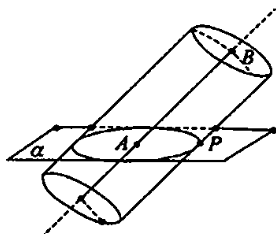


图4

4. 善学者和善思者的特征

善学者, 按部就班, 规规矩矩, 按照通法通解来解决问题; 善思者, 掌握数学的核心思想方法, 比如数形结合思想, 转化和化归思想等等, 抓住了数学问题的本质, 快速找到解决问题的途径.

例5 (2010年全国高考浙江理科卷) 已知平面向量 $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ($\vec{\alpha} \neq 0, \vec{\alpha} \neq \vec{\beta}$) 满足 $|\vec{\beta}| = 1$, 且 $\vec{\alpha}$ 与 $\vec{\beta} - \vec{\alpha}$ 的夹角为120°, 则 $|\vec{\alpha}|$ 的取值范围是______.

解法一: 设平面向量 α 与 β 的夹角为 θ, 由题意得 $\alpha(\beta-\alpha) = |\alpha||\beta-\alpha|\cos 120^\circ$, 又 $\alpha(\beta-\alpha) = \alpha\beta - |\alpha|^2 = |\alpha||\beta|\cos\theta - |\alpha|^2$, 整理得 $|\beta-\alpha| = -2\cos\theta + 2|\alpha|$, 两边平方整理得 $3|\alpha|^2 - 6|\alpha|\cos\theta + 4\cos^2\theta - 1 = 0$, 解得 $|\alpha| = \cos\theta \pm \dfrac{\sqrt{3}}{3}\sin\theta$, 即得 $|\alpha| \leqslant \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$, 所以 $|\alpha|$ 的取值范围是 $\left(0, \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right]$.

评注: 此法规规矩矩, 对运算的要求较高, 单纯从向量的代数形式进行运算, 求 $|\alpha|$ 的范围.

解法二: 设 $\overrightarrow{OA} = \beta, \overrightarrow{OB} = \alpha$, 则 $\overrightarrow{BA} = \beta - \alpha$, 在 $\triangle OAB$ 中, $\angle OBA = 60^\circ$, 则 $\dfrac{|\overrightarrow{OA}|}{\sin\angle OBA} = \dfrac{1}{\sin 60^\circ} = \dfrac{|\alpha|}{\sin\angle OAB}$, 即 $|\alpha| = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\sin\angle OAB$, 由 $0^\circ < \angle OAB < 120^\circ$ 得到 $|\alpha|$ 的取值范围是 $\left(0, \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right]$.

评注: 此法通过向量的几何意义, 删繁就简, 再利用正弦定理, 求 $|\alpha|$ 的取值范围.

善于思考者, 考虑的是第二种解法, 能想到向量的双重身份, 集几何与代数于一体, 在思考的过程中, 把结果就"看"出来了.

在平时的教学中, 我们既要讲解问题的通法通解, 也要鼓励学生能够提出创新的解法, 这样才能使得学生的创新思维有所发展. 学和思是一个永恒的话题, 这里是笔者个人的一些观点,不妥之处还请批评指正.

$\sin 45°\sin 30°$ 呢？文[2]的设计是分别取角α为2π, π, 0时，得$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta$，取角$\alpha$分别为$\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$时，$\cos(\alpha-\beta)=\sin\alpha\sin\beta$，猜想$\cos(\alpha-\beta)$与$\sin\alpha\sin\beta$或$\cos\alpha\cos\beta$都有联系，进而猜想$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$. 我们不禁要问如果将角$\alpha$取特殊值时的结果用相应三角函数值表示出来，是否还能观察到教师设计的两个结果？文[3]则是用几何方法进行推导得出公式. 以上这些设计存在两个问题：一是过于牵强，不够自然，脱离学生实际；二是在教学中耗时太多，不够"经济". 另外关于公式的证明，多采用向量法，如文[1]、[2]、[3]. 沪教版教材把向量的内容安排在两角和与差的三角公式之后，采用的是等角对等弦建立等量关系的方法，通过将角旋转$-\beta$角得证，思路显得突兀.根据以上分析，笔者对这两个问题的教学设计进行了改进并在课堂上进行实践尝试，收到了满意的效果，现介绍如下，敬请同行指教.

1. 问题的提出

前面我们学习的诱导公式给出了角$k\pi\pm\alpha$的三角比与角α的三角比间的关系，如果把角$k\pi\pm\alpha$中的$k\pi$换成$\frac{\pi}{3}$，角$\frac{\pi}{3}\pm\alpha$的三角比与角α的三角比之间的关系如何呢？一般地，将$k\pi$换成任意角β，角$\beta\pm\alpha$的三角比与角α、β的三角比之间的关系如何呢？这节课我们先来探讨$\cos(\alpha-\beta)$与角α、β的三角比的关系.

2. 公式结构的猜想

我们先来探究一下$\cos(\alpha-\beta)$表达式的结构.

师：你能根据$\cos(\alpha-\beta)$的形式猜测一下其表达式的结构特征吗？

生：因为$\cos(\alpha-\beta)=\cos(\beta-\alpha)$，所以$\cos(\alpha-\beta)$的表达式中，角$\alpha$、$\beta$应是对称的.

师：当$\alpha=\beta$时，$\cos(\alpha-\beta)=1$，你能用α的三角比表示1吗？

生：$\cos(\alpha-\alpha)=1=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha$.

师：将上式改写为$\cos(\alpha-\alpha)=\cos\alpha\cos\alpha+\sin\alpha\sin\alpha$，类比该式，你能试着猜测$\cos(\alpha-\beta)$的表达式吗？

生：$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$. ⋯⋯ (1)

3. 实验验证

先让学生验证式(1).

①取$\alpha=\pi$，得$\cos(\pi-\beta)=-\cos\beta$;

②取$\alpha=0$，得$\cos(-\beta)=\cos\beta$;

③取$\alpha=60°$, $\beta=30°$，因为$\cos(60°-30°)=\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos 60°\cos 30°+\sin 60°\sin 30°=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

所以$\cos(60°-30°)=\cos 60°\cos 30°+\sin 60°\sin 30°$.

4. 探究证明

如何证明式(1)呢？有关任意角的三角函数问题，我们通常在直角坐标系中研究，为了使问题简化，常以单位圆为辅助工具.

如图1，在直角坐标系xOy中，作出角α、β，它们的终边分别与单位圆交于点P_2、P_3，分别用角α、β的三角函数表示出点P_2、P_3的坐标$P_2(\cos\alpha, \sin\alpha)$、$P_3(\cos\beta, \sin\beta)$. 为了得到公式，需要寻找$\cos(\alpha-\beta)$与$\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\sin\alpha$、$\sin\beta$的等量关系.

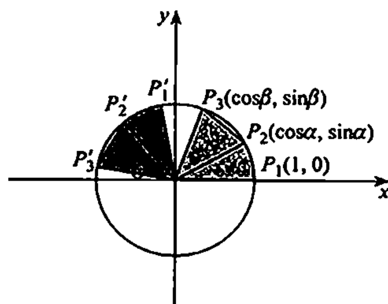


图1

师：我们学过哪些几何变换，它们有什么性质？

生：平移变换、旋转变换和对称变换，它们只改变图形的位置，但不改变图形的大小.

师：为了证明公式，我们可以利用几何变换下的不变量来建立等量关系.

如果将图形$OP_1P_2P_3$绕点O旋转θ角(用《几何画板》演示)，这时$P_1\longrightarrow P_1'$, $P_2\longrightarrow P_2'$, $P_3\longrightarrow P_3'$，旋转后，图形中的哪些量保持不变？哪些量变了？

生：角α、β和$\angle P_2OP_3$的大小保持不变，两点间的距离保持不变，如$|P_2P_3|=|P_2'P_3'|$；点P_1、P_2、P_3的坐标发生了变化.

(下转第11-36页)

业精于勤荒于嬉, “教”成于思而毁于随

242000 安徽省宣城市第二中学 汪智源

章建跃博士指出: “教学设计是课堂教学的蓝本, 是对课堂教学的整体规划和预设, 勾勒出了课堂教学活动的效益取向. 设计教学方案时, 教师对当前的教学内容及其地位(概念的‘解构’、思想方法的‘析出’、相关知识的联系方式等), 学生已有知识经验, 教学目的, 重点与难点, 如何依据学生已有认知水平和知识的逻辑过程设计教学过程, 如何突出重点和突破难点, 学生在理解概念和思想方法时可能会出现哪些情况以及如何处理这些情况, 设计哪些练习以巩固新知识, 如何评价学生的学习效果等, 都已经有一定的思考和预设.”[1]

2011年安徽省青年数学教师优秀课比赛刚刚落下帷幕, 笔者有幸作为选手参与其中并获得了一等奖. 此次比赛的内容是《方程的根与函数的零点》, 由于笔者在校级选拔赛中上的也是同样的内容, 因此对这一内容有很大感悟, 现把这两节同课异构的课作一比较, 以此为例谈谈教学反思对我们青年教师成长的帮助.

本节课是第三章《函数与方程》的第一节课,是新课程新增内容. 它要求学生在学习了基本初等函数的基础上, 利用函数图像得到函数零点, 进而判定零点的存在性, 这是让学生从函数的角度来思考方程, 体会方程和函数的思想. 这也为下节“用二分法求方程近似解”这一“函数的应用”做准备, 同时也为后续学习的算法埋下伏笔.

在校级的课 (以下简称校级课) 中, 笔者是按照课本上的设计来进行的, 照猫画虎; 在省里比赛的课 (以下简称省级课) 里, 其设计立足于课本, 又不照搬课本, 用课本教而不是教课本.

下面就从课的三个方面的设计为例来作一探讨——零点的概念、方程的根与零点的关系和零点存在的判定.

一、情景设置, 概念引入

在校级课中, 笔者首先从对两个方程的求解:

(1) $2x-1=0$; (2) $x^2-2x-3=0$

引入本节课, 然后给出三组具体的二次函数与一元二次方程

$$\begin{cases}y=x^2-2x-3,\\x^2-2x-3=0,\end{cases}\quad\begin{cases}y=x^2-2x+1,\\x^2-2x+1=0,\end{cases}$$

$$\begin{cases}y=x^2-2x+3,\\x^2-2x+3=0,\end{cases}$$

师生共同得出方程的根与图像交点的关系后再推广到一般形式.

得出方程的根及函数图像与x轴交点的横坐标的关系, 在此基础上给出函数零点的概念. 此时得出概念花了15分钟, 在实施的过程中, 学生把注意力过多地放在了判别式上, 而淡化了概念.

对此, 在省级课中, 笔者作了如下改动. 首先在引例中, 加入不容易解的方程(2) $\lg x+2x-6=0$, 这一设计为本节课的必要性作了说明. 之后, 给出一幅图画 (图1), 这幅图画从三个不同角度观察可以得到少女、老妇和长胡子的老头.



图1

笔者给出两个问题:

问题1　从图片上你发现了什么?

问题2 从中有什么启示？

学生自然非常有兴趣，得出结论：从不同角度看同一事物，结论是不一样的.

于是笔者顺势指出：这是生活中的例子，下面我们来看数学中的例子……

紧接着，结合 $y=2x-1$ 和 $y=\lg x+2x-6$ 的图像引入了零点概念.

上述两种概念引入，校级课照搬课本，单纯从"一次"函数和"二次"函数开始，由于两个方程学生已经会解，所以体现不出这节课的学习必要性. 省级课更有利于激发学生学习动力，突出从"数"和"形"两个不同角度阐述，只花了8分钟就得出零点的概念，但这一设计并没有完全把"二次"弃用而是转化为例1，巩固概念.

例1 判断下列函数零点的个数：

(1) $y=x^2-2x-2$; (2) $y=x^2-2x+1$; (3) $y=x^2-2x+2$.

二、方程的根与函数的零点

两节课在给出了零点的概念后都给出了三种关系. 这一组等价关系在本节课中起着承上启下的作用，如何给出这组关系呢？

在校级课中，设计如下：(根据课本)

方程 $f(x)=0$ 有实数根 $\Longleftrightarrow$ 函数 $y=f(x)$ 的图像与 x 轴有交点 $\Longleftrightarrow$ 函数 $y=f(x)$ 有零点.

从教学实施的效果来看，并不理想，学生并没有真正弄懂.

在省级课中对上述三种关系略作改进：x_0 是方程 $f(x)=0$ 的实数根 $\Longleftrightarrow (x_0,\ 0)$ 是函数 $y=f(x)$ 的图像与 x 轴的交点 $\Longleftrightarrow$ 函数 $y=f(x)$ 有零点 x_0.

将上述关系具体化，让学生有一直观感受，不显得太突然，更容易理解.

三、零点存在性定理

1. 在定理引入方面

课本是通过直观到抽象的过程才得到判断函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内有零点的条件，如何让学生从直观自然过渡到抽象，是本节课的难点.

在校级课件中，笔者通过设问：

在怎样的条件下，函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 上存在零点？

观察函数的图像 (如图2) 并填空：

(1) 在区间 (a,b) 上，$f(a)f(b)$______ 0 (<或>)，在区间 (a,b) 上______(有/无) 零点？

(2) 在区间 (b,c) 上，$f(b)f(c)$______ 0 (<或>)，在区间 (b,c) 上______(有/无) 零点？

(3) 在区间 (c,d) 上，$f(c)f(d)$______ 0 (<或>)，在区间 (c,d) 上______(有/无) 零点？

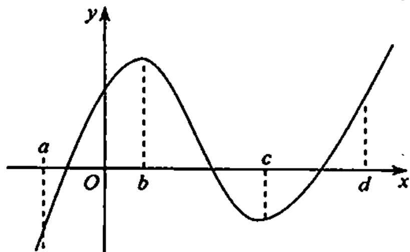


图2

然后归纳得出零点存在性定理.

从后来的教学效果上看，这一设计有填鸭式教学之嫌，把知识生硬地塞入学生的大脑，难点并没有得到有效的处理.

针对上述情况，在省级课中作了如下的改进：

首先从小马过河的例子引入，然后过渡到函数 $y=x^2-2x-2$ 的图像，当图像穿过 x 轴，与 x 轴就有了交点.

如果不作图，如何判断是否有交点呢？

穿过是一种几何现象，如何用代数来刻画呢？

师生共同探究函数 $f(x)=x^2-2x-2$ 在 (2, 3) 内的取值与零点的情况 (如图3).

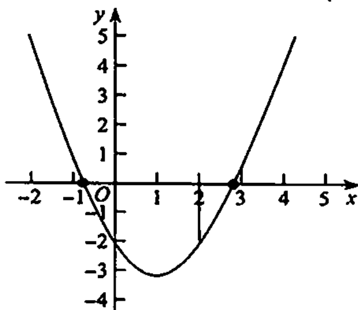


图3

从生活中的例子过渡到函数，主要是突出"形"的作用，但如果仅仅用"形"，零点存在性定理就没有必要了，设计上述两个问题，意在突出零点存在性定理的必要性.

对于函数，不用前面的 $y=x^2-2x-3$ 而改用 $f(x)=x^2-2x-2$，笔者基于以下考虑：$y=x^2-2x-3$ 的二个零点，可以通过解方程很容易得到 -1 和3，如此轻松地求出了零点，

使用零点存在性定理就没有什么意义了. 使用$f(x) = x^2 - 2x - 2$, 其两个零点相对来说不是很容易求得, 同时根据图像容易得到定理需要的不等式$f(2)f(3) < 0$. 对于另一个零点, 让学生分组合作, 验证$(-1,0)$处是否有上述结果, 让学生亲自动手去体验一下.

2. *在定理的巩固上*

校级课中笔者给了这样一个例子:

例2 判断正误, 若不正确, 请使用函数图像举出反例.

(1) 已知函数$y = f(x)$在区间$[a, b]$上, 且有$f(a)f(b) < 0$, 则$f(x)$在区间(a,b)上存在零点. ( )

(2) 已知函数$y = f(x)$在区间$[a, b]$上连续不断, 且有$f(a)f(b) > 0$, 则$f(x)$在区间(a,b)内没有零点. ( )

(3) 已知函数$y = f(x)$在区间$[a, b]$上连续不断, 且有$f(a)f(b) < 0$, 则$f(x)$在区间(a, b)内有且仅有一个零点. ( )

这一设计虽然有利于学生理解定理, 却限制了学生的思维, 学生长此以往会形成一种依赖心理.

在省级课上, 笔者只给出了一个不完整的函数图像, 外加一个问题, 却达到了很好的课堂效果.

练习2 如图4, 如果函数$y = f(x)$有零点, 请把其图像补充完整.

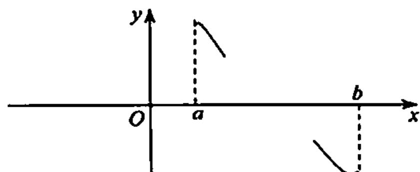


图4

此设计只抛给学生一个问题, 让学生自己去设计, 最后学生得出了以下答案 (见图5～图7).

几点反思:

一、数学教学要重视学生数学思维的训练. 高一学生, 他们正在从经验性的抽象逻辑思维向理论性抽象逻辑思维转变, 把握好学生的"最近思维区"是一个关键. 正是立足于这一点, 在省级课中笔者从学生最熟悉的一次函数和一元一次方程入手, 降低难度, 聚焦新知识.

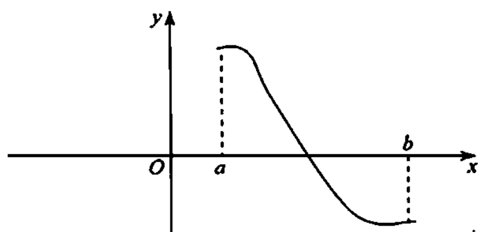


图5

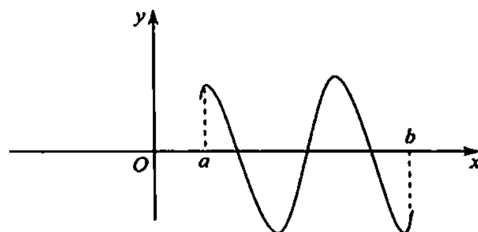


图6

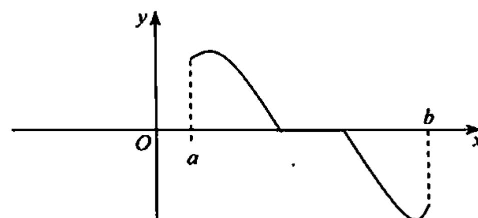


图7

二、问题设置要合理, 防止产生"滑过现象". 问题是数学的心脏, 以问题串的形式呈现内容是一个不错的形式. 把大问题设置成若干个有梯度的小问题 (这些问题要能够层层递进、循序渐进), 方便学生回答、思考. 上述要求应该是针对较难的知识的, 对于有些知识, 问题设置不宜过细, 过细了容易让学生产生思维惰性.

通过同课异构, 笔者认识到"教学——反思——再教学"对一名教师, 特别是青年教师的帮助和作用. 在反思中不断成长, 教无定法, 教无止境! 如何真正地把新课改的理念应用到教学中去, 体现出学生的主体地位, 培养其创造性, 需要教师不断地摸索、总结.

参考文献

[1] 章建跃. 数学教学反思的内容与方法 (指导意见) [C/OL]. 人教网, 2009.

3D课堂教学模式的一次实践

213032 江苏省常州市北郊高级中学 包静怡

3D课堂教学, 即"发现(Discover)、领悟(Digest)、发展(Develop)", 是常州北郊高级中学基于建构主义理论、发现学习理论和教育心理学理论的基础上提出的一种新型课堂教学模式. 3D课堂教学, 就是从情境或者阅读出发, 让学生经历发现知识的过程, 发现问题, 然后通过自主学习、互助活动、全班交流、教师精讲几个环节, 让学生领悟知识, 最后发展到运用知识解决新问题和发现新问题.

基于3D课堂教学模式, 笔者开设了一节高三复习课, 授课对象是第一轮复习初始的文科班学生, 内容为"$ax^2+bx+c>0$(或<0)形式不等式的解法".

1. 教学实录

1.1 提出问题, 启发学生发现解题方法

师: 前面我们已经复习了一元二次不等式的解法, 首先请同学们回顾一元二次不等式解法的步骤.

生: 第一步, 二次项系数化正; 第二步, 求根(因式分解、求根公式); 第三步, 写出解集.

师: 如果在不等式中加入参数, 不等式如何来解呢? 请同学们一起来研究下面的例题:

$x^2-x-a(a-1)>0$.

给学生一定的时间动手解不等式, 请学生将解题过程用实物投影仪展示, 并讲解如何解这个不等式.

教师引导学生发现在解含有参数的不等式时, 需要进行分类讨论, 讨论的标准是两根的大小.

1.2 设计变式, 引导学生领悟解题规律

变式: $ax^2-x-(a-1)>0$.

师: (引导学生发现) 变式题中参数的位置发生了什么变化? 参数出现在了二次项系数上, 它还是一元二次不等式吗?

生: 不一定. 需要讨论!

带着思考, 学生动笔解题. 等大多数学生基本有了一些思考和书写过程之后, 教师和学生一起研究探讨如何进行分类讨论, 把二次项系数的讨论和两根大小的比较这两个层次梳理清楚, 并在黑板上给出完整的规范的书写过程.

师: (引导学生领悟) 例题和变式题中参数出现的位置不同, 这对分类讨论有怎样的影响?

生: 参数出现在二次项系数上, 分类讨论要考虑二次项系数的正、负、零. 参数出现在一次项和常数项上, 可以因式分解讨论两根大小.

师: (引导学生进一步领悟) 含参数的不等式$ax^2+bx+c>0$(或<0)的解法的步骤.

生: 主要是运用了分类讨论的思想. 第一步, 二次项系数的讨论(正、负、零); 第二步, 可以利用因式分解比较两根大小; 第三步, 写出解集.

1.3 横向拓展, 发展学生的知识迁移能力

拓展1: (1) 解不等式 $\dfrac{ax-(1-a)}{x-1}>0$.

先让学生审题, 不动笔, 然后讲解题思路.

生: 分式化为整式, 讨论二次项系数的正负.

师: 这题与变式题一样吗?

学生发现将其化为整式后其实就是同一题, 从而感受到分式不等式的解决过程其实就是化为整式不等式, 解含参数的不等式$ax^2+bx+c>0$(或<0).

拓展1: (2) 解不等式 $\dfrac{ax-(1-a)}{x-1}>1$.

让学生动手解决, 请一名学生将解题过程用实物投影仪展示, 并进行讲解. 学生解题过程完全正确, 但是讲解比较简略, 教师又补充提了几个问题, 让学生将一些细节都叙述清楚,

使其他同学也都能了解清楚. 然后再请同学感悟拓展1中两题分式不等式的解法.

生: 不等号右边不是0的话先移项、通分, 使得右边化为0, 然后将分式化为整式. 再讨论二次项系数, 比较两根大小.

拓展2: (1) 不等式$x^2-x-a(a-1)>0$的解集为$\{x|x>2或x<-1\}$, 求a的值.

生: 解集为$\{x|x>2或x<-1\}$, 相当于不等式$x^2-x-a(a-1)>0$对应的方程$x^2-x-a(a-1)=0$的两个根就是2和-1, 然后用韦达定理解出a.

教师提醒学生, 这里涉及到一元二次不等式、一元二次方程、二次函数三者之间的关系, 这也是非常重要的, 需要好好体会.

1.4 纵向拓展, 深入发展学生逆向思维的能力

拓展2: (2) 不等式$ax^2+bx+c>0$的解集为$\{x|2<x<4\}$, 求$cx^2+bx+a<0$的解集.

生: 不等式$ax^2+bx+c>0$对应的方程$ax^2+bx+c=0$的两根为2和4, 运用韦达定理可以写出两个关于a、b、c的关系式, 然后用a表示b、c, 代入新的不等式中, 将a消去, 解出不等式.

教师一边与学生一起探究, 一边将该题的解题过程规范地书写在黑板上. 并对学生的讲解提出问题, 引发全班同学的思考. 例如这里为什么要用a来表示b、c? a的正负明确吗? 从哪里看出来? 学生敏感地发现了解集的形式决定了二次项系数的正负, 教师对此作出了高度的评价.

拓展2: (3) 不等式$ax^2+bx+c>0$的解集为$(\alpha,\beta)(0<\alpha<\beta)$, 求不等式$cx^2+bx+a<0$的解集.

由于有了拓展2(2) 的解决, 这一小题放手给学生自己研究. 请学生展示解题过程并讲解, 由其他同学进行评价.

教师引导学生感悟: 已知含参不等式的解集, 求参数的值或求另一不等式的解集, 通常的解题思路.

生: 给出解集, 就知道了不等式对应方程的根. 运用韦达定理可以表示出根与系数的关系, 再代入到新的不等式中, 消元之后不等式就可以解出.

1.5 总结提炼, 对学生进行数学思想方法的渗透

师: 本节课我们复习了什么内容? 你发现解题方法了吗? 领悟到什么数学思想?

生: 这节课我们复习了含参数的不等式$ax^2+bx+c>0$(或<0)的解法, 具体方法是: 第一步, 二次项系数的讨论(正、负、零); 第二步, 可以利用因式分解来比较两根大小; 第三步, 写出解集.

生: 这节课我领悟到了分类讨论的思想方法, 发现参数出现在不同的位置, 分类讨论的标准不同. 还学会了运用含参不等式的解集, 求参数的值或求另一含参不等式的解集这种逆向思维的方法.

师: 同学们都总结得很好! 这节课我们只研究了二次项系数讨论之后可以因式分解的类型, 而要讨论判别式的情况则后续再进行研究. 这一组题请大家课后思考, 我们下节课再继续复习.

课后思考:

(1) $x^2-x-(a-1)>0$.

(2) $(a-1)x^2-x-1>0$.

2. 教后反思

课堂教学是以学生为主体, 教师为主导, 不能是单靠教师的讲授, 但也不能忽视教师的有效组织和引导. 讲授—给予、启发—引导、放手—自主这是课堂教学过程中的三个常态, 如何将这三态有机地结合到一起, 各司其职而又相互促进, 发挥其最大效率, 是课堂教学中我们经常需要研究的问题. 针对本节复习课而言, 笔者认为学生已经有了一定的解不等式的知识和对参数进行讨论的能力, 首先应该放手让学生自主探究, 在解决问题的过程中自主发现解法特征, 然后领悟规律, 学生不能发现、领悟的地方教师适时地给予启发、引导, 特别困难的问题适当讲解、示范. 笔者在上课过程中, 在参数出现的位置与分类讨论的标准的制定上适当做了一些引导, 在既要讨论二次项系数, 又要讨论两根大小类型的问题上与学生一起讨论并在黑板上做了解题示范, 其他环节基本上均由学生自主完成.

“探索—归纳—猜想—论证”的一个案例

——图形计算器在探索活动中的应用

200062 上海市崇明县教学研究室 龚为民

在高中阶段, 我们研究了函数 $y=ax+\frac{b}{x}\ (a\neq 0, b\neq 0)$ 的图像与性质, 学生被该函数图像的美和研究过程的乐趣深深地吸引. 我们曾不断地对它进行拓展研究, 获得过许多研究过程的愉悦与有价值的研究结果. 其中包括对函数

$$f_n(x)=x^n+x^{n-1}+\cdots+x+1+\frac{1}{x}+\cdots+\frac{1}{x^{n-1}}+\frac{1}{x^n}(n\in \mathbf{N}^*)$$

的图像与性质的研究.

一、从简单情形入手探索

我们先从简单的特殊情形入手, 利用图形计算器, 观察与研究函数 $f_n(x)$ 的图像与性质.

1. 令 $n=1$, 对函数 $f_1(x)=x+1+\frac{1}{x}$ 的图像与性质进行探索 (见图 1).

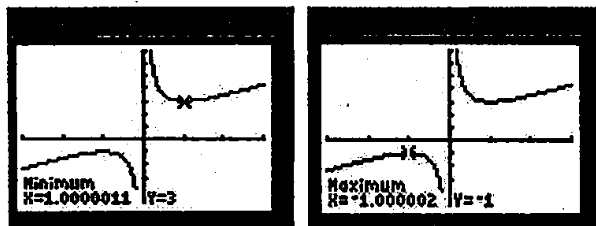


图 1

从图形上可以看出, 函数 $f_1(x)$ 在区间 $(-\infty,-1)$ 和 $(1,\infty)$ 内分别单调递增, 在区间 $(-1,0)$ 和 $(0,1)$ 内分别单调递减; 值域为 $(-\infty,-1]\cup[3,+\infty)$; 图像的对称中心为 $(0,1)$; 有一个极小值点 $(1,3)$、一个极大值点 $(-1,-1)$; 该函数是非奇非偶函数.

2. 令 $n=2$, 对函数 $f_2(x)=x^2+x+1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$ 的图像与性质进行探索 (见图 2).



图 2

从图形上可以看出, 函数 $f_2(x)$ 在区间 $(-1,0)$ 和 $(1,+\infty)$ 内分别单调递增, 在区间 $(-\infty,-1)$ 和 $(0,1)$ 内分别单调递减; 函数在 $(-\infty,0)$ 上的值域为 $[1,+\infty)$, 在 $(0,+\infty)$ 上值域为 $[5,+\infty)$, 因此函数 $f_2(x)$ 值域为 $[1,+\infty)$; 函数有两个极小值点为 $(-1,1)$、$(1,5)$.

3. 令 $n=3$, 对函数 $f_3(x)=x^3+x^2+x+1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}$ 的图像与性质进行探索 (见图 3).

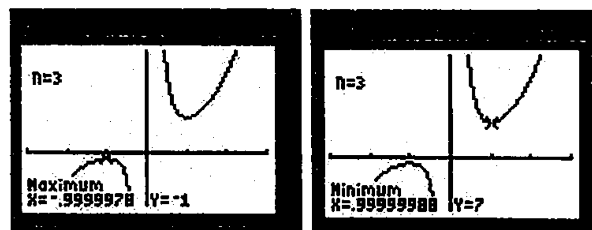


图 3

从图形上可以看出, 函数 $f_3(x)$ 在区间 $(-\infty,-1)$ 和 $(1,+\infty)$ 内分别单调递增; 在区间 $(-1,0)$ 和 $(0,1)$ 内分别单调递减; 函数在 $(-\infty,0)$ 上的值域为 $(-\infty,-1]$, 在 $(0,+\infty)$ 上值域为 $[7,+\infty)$, 因此函数 $f_3(x)$ 值域为 $(-\infty,-1]\cup[7,+\infty)$; 函数有极大值点 $(-1,-1)$ 和极小值点 $(1,7)$.

下面我们对函数 $y=f_3(x)$ 的单调性进行证明.

因为 $f_3(x_1)-f_3(x_2)=(x_2^3-x_1^3)\left(\frac{1}{x_1^3\cdot x_2^3}-1\right)+(x_2^2-x_1^2)\left(\frac{1}{x_1^2\cdot x_2^2}-1\right)+(x_2-x_1)\left(\frac{1}{x_1\cdot x_2}-1\right)$, 容易证明, 当 $1<x_1<x_2$ 或 $x_1<x_2<-1$ 时, $f_3(x_1)-f_3(x_2)<0$; 当 $0<x_1<x_2<1$ 或 $-1<x_1<x_2<0$ 时, $f_3(x_1)-f_3(x_2)>0$.

即函数 $y=f_3(x)$ 在区间 $(-1,0)$ 和 $(0,1)$ 上单调递减; 在区间 $(-\infty,-1)$ 和 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

用相同的方法可以探究函数 $y=f_4(x)$, 函数 $y=f_5(x)$, 函数 $y=f_6(x)$, $\cdots\cdots$ 的图像与性质.

二、通过归纳, 猜想函数 $y=f_n(x)$ 的一般性质

在对 $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$, $y=f_3(x)$ 的图像与性质进行研究后, 我们发现 n 为奇数与偶数时, 图像有明显的不同, 因此借助于图形计算器, 进一步作出 $n=1,3,5,7$ 与 $n=2,4,6,8$ 时的图像 (见图4), 这时可以很清楚地观察到函数 $f_n(x)(n\in\mathbf{N}^*)$ 的图像具有两种不同的情形, 试归纳出定理.

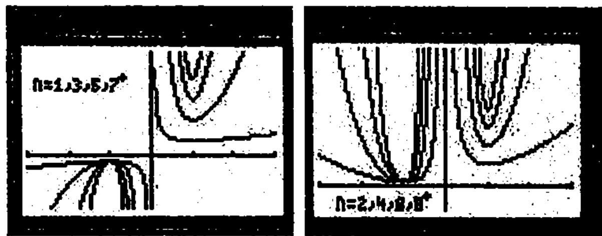


图4

定理 当 n 为奇数时, $f_n(x)=x^n+x^{n-1}+\cdots+x+1+\frac{1}{x}+\cdots+\frac{1}{x^{n-1}}+\frac{1}{x^n}$ 在区间 $(-1,0)$ 和 $(0,1)$ 上分别单调递减, 在区间 $(-\infty,-1)$ 和 $(1,+\infty)$ 上分别单调递增, 值域为 $(-\infty,-1]\cup[2n+1,+\infty)$.

当 n 为偶数时, $f_n(x)=x^n+x^{n-1}+\cdots+x+1+\frac{1}{x}+\cdots+\frac{1}{x^{n-1}}+\frac{1}{x^n}$ 在区间 $(-\infty,-1)$ 和 $(0,1)$ 分别单调递减, 在区间 $(-1,0)$ 和 $(1,+\infty)$ 分别单调递增; 值域为 $[1,+\infty)$.

三、根据函数单调性定义进行严格证明

为了叙述方便, 我们将上述定理分成三部分:

1) 当 $x>0$ 时, $f_n(x)$ 在区间 $(0,1)$ 单调递减, 在区间 $(1,+\infty)$ 单调递增, 值域为 $[2n+1,+\infty)$;

2) 当 $x<0$ 且 n 为奇数时, $f_n(x)$ 在区间 $(-1,0)$ 单调递减, 在区间 $(-\infty,-1)$ 单调递增, 值域为 $(-\infty,-1]$;

3) 当 $x<0$ 且 n 为偶数时, $f_n(x)$ 在区间 $(-\infty,-1)$ 单调递减, 在区间 $(-1,0)$ 单调递增, 值域为 $[1,+\infty)$.

证明: 1) 利用数学归纳法.

(i) 当 $n=1$ 时, 易证函数 $y=x+1+\frac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 单调递减, 在区间 $(1,+\infty)$ 单调递增; 值域为 $[1,+\infty)$.

(ii) 假设当 $n=k(k\in\mathbf{N}^*)$ 且当 $x>0$ 时, $f_k(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递减, 在 $(1,+\infty)$ 单调递增, 值域为 $[2k+1,+\infty)$. 当 $n=k+1$ 时, $f_{k+1}(x)=f_k(x)+x^{k+1}+\frac{1}{x^{k+1}}$, 任取 $0<x_1<x_2<1$, $f_{k+1}(x_1)-f_{k+1}(x_2)=f_k(x_1)-f_k(x_2)+(x_1^{k+1}-x_2^{k+1})\left(1-\frac{1}{x_2^{k+1}\cdot x_1^{k+1}}\right)>0$ 成立, 所以函数 $f_{k+1}(x)=f_k(x)+x^{k+1}+\frac{1}{x^{k+1}}$ 在区间 $(0,1)$ 单调递减.

综上可得, 函数 $f_n(x)$ 在区间 $(0,1)$ 单调递减.

同理, 函数 $f_n(x)=x^n+x^{n-1}+\cdots+x+1+\frac{1}{x}+\cdots+\frac{1}{x^{n-1}}+\frac{1}{x^n}$ 在区间 $(1,+\infty)$ 单调递增. 所以当 $x>0$ 时, 函数的值域为 $[f(1),+\infty)$, 即 $[2n+1,+\infty)$.

2) 因为 $f_n(x)=x^n+x^{n-1}+\cdots+x+1+\frac{1}{x}+\cdots+\frac{1}{x^{n-1}}+\frac{1}{x^n}=\frac{(1-x^{2n+1})}{(1-x)x^n}$, 当 n 为奇数且 $-1<x_1<x_2<0$ 时,

$f_n(x_1)-f_n(x_2)=[(x_2^{n+1}-x_1^{n+1})(x_1^nx_2^n-1)+(x_2^n-x_1^n)(1-x_1^{n+1}x_2^{n+1})]/[(1-x_1)(1-x_2)x_1^nx_2^n]>0$,

当 $-1<x_1<x_2<0$ 时, $f_n(x_1)-f_n(x_2)>0$; 当 $x_1<x_2<-1$ 时, $f_n(x_1)-f_n(x_2)<0$, 即当 $x<0$ 且 n 为奇数时, $f_n(x)$ 在区间 $(-1,0)$ 单调递减, 在区间 $(-\infty,-1)$ 单调递增, 值域为 $(-\infty,-1]$.

(下转第11-49页)

平面几何问题的升维处理

325204 浙江省瑞安市塘下中学 叶挺彪

降维法是解决立体几何问题的常用方法,它的反面——升维法,也能创设新的数学情境,充分暴露问题的本质、结构,使得规律尽收眼底.

一、证共线点

在立体几何中,利用“两个平面的公共点共线”很容易地处理一类共线点问题,一个自然的问题是:能否利用它解决平面几何中的共线点问题?由此可得升维处理法:即设法构造另一平面,使点所在的直线为两个平面的交线,然后说明要证的点是它们的公共点.

例1 设X、Y、Z分别是$\triangle ABC$三边BC、CA、AB所在直线上的点,则它们共线的充要条件是$\dfrac{BX}{XC}\cdot\dfrac{CY}{YA}\cdot\dfrac{AZ}{ZB}=-1$.

证:(充分性)设$\triangle ABC$所在平面为α,分别过点A、B、C作与平面α垂直的线段AA'、BB'、CC',使

$$\frac{BB'}{CC'}=-\frac{BX}{XC},\frac{CC'}{AA'}=-\frac{CY}{YA}$$

(当点X在BC上,则BB'、CC'在平面α的两侧,不然为同侧,其余类似,如图1).

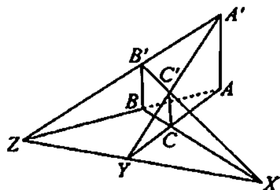


图1

$\therefore$ 点X、Y分别在直线$B'C'$、$C'A'$上,此时

$$\frac{BB'}{AA'}=\frac{BB'}{CC'}\cdot\frac{CC'}{AA'}=\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}=-\frac{ZB}{AZ},$$

$\therefore$ 点Z在直线AB上.

设$\triangle A'B'C'$所在平面为β,则X、Y、$Z\in\beta$.

又X、Y、$Z\in\alpha$,故X、Y、Z三点共线.

(必要性)若X、Y、Z共线于l,则过l作平面β使之不与平面α垂直.分别过点A、B、C作垂直于平面α的直线依次交平面β于点A'、B'、C',由三角形的相似性不难得

$$\frac{BX}{XC}=-\frac{BB'}{CC'},\ \frac{CY}{YA}=-\frac{CC'}{AA'},$$
$$\frac{AZ}{ZB}=-\frac{AA'}{BB'}.$$

由三者相乘即得结论.

从该例可见,利用升维法处理共线点问题显得方便、快捷.又如在三维空间中俯视笛沙格(Desargues)定理:“若两三角形的对应顶点连线交于一点,则对应边的交点共线”,即“三棱维的一个截面与底面相交于一条直线(如图2)”,此时显得如此显然,并也易于发现它与例1的内在联系.

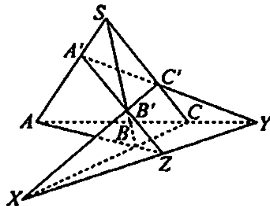


图2

例2 在平面上任意作三个半径互不相等且互不相交的圆,对每两个圆作出它们的两条外公切线的交点(如图3),求证这三个交点共线.

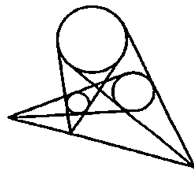


图3

分析:分别作以这三个圆为大圆的三个球,原来的三对外公切线现在为三个圆锥的母线,此时三个圆锥中每一个都正好放进两个球.三个圆锥顶点在三个球心所在平面α上.

又设想一平面β搁在三个球上与三个球都相切，从而也与三个圆锥相切，所以三个圆锥顶点必在平面β上，即三顶点在平面α、β的交线上，即三顶点共线.

二、证共点线

共点线问题可转化为"点在直线上"问题，利用"两平面的公共点在两平面的交线上"，类似于共线点问题可加以升维处理.

例3　如图4，在直角梯形$ABCD$中，$DC > AB$，$AB = BC$，$\angle BAD = \angle CDA = 90°$，点$E$、$F$分别为$AD$、$CD$的中点，$AG \perp BE$、$DH \perp EF$、$CL \perp BF$，点$G$、$H$、$L$分别为垂足. 求证：$AG$、$DH$、$CL$三线共点.

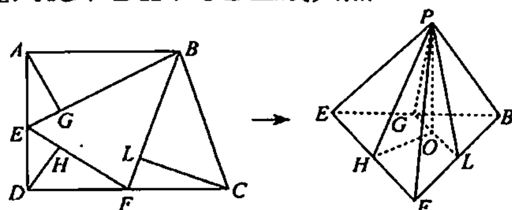


图4

证：由条件可知，沿$\triangle BEF$的三边把$\triangle BEA$、$\triangle EFD$、$\triangle FBC$折起，使点A、D、C重合于点P，则AG、DH、CL分别为三棱锥$P-BEF$的斜高PG、PH、PL.

作三棱锥$P-BEF$的高PO，则OG是斜高PG在底面的射影，由三垂线定理得$OG \perp BE$. 于是在原平面内AG与OG共线，即AG过点O.

同理DH、CL过点O.

因此AG、DH、CL三线共点.

说明：此处条件"直角梯形"可以放宽，只需能折成三棱锥的任一四边形都可以. 对于具备什么样条件的四边形才能折成三棱锥，有待进一步探讨.

三、证线段相等

正棱锥的侧棱(斜高)相等，圆锥的母线相等，注意到这一事实，可以解决一些平面中的线段相等问题.

例4　(1989年加拿大IMO训练题) H为锐角$\triangle ABC$的垂心，D、E、F分别为BC、CA、AB的中点，一个以点H为圆心的圆交DE于P、Q，交EF于R、S，交FD于T、U. 证明：$CP = CQ = AR = AS = BT = BU$.

分析：由D、E、F为锐角$\triangle ABC$三边的中点可知：将$\triangle AEF$、$\triangle BFD$、$\triangle CDE$翻折可使A、B、C重合于点A'(如图5)，则欲证的六条线段长即为A'到相应各点的距离，而这六点在$\odot H$上，于是只需证以A'为顶点，以$\odot H$为底的几何体为圆锥.

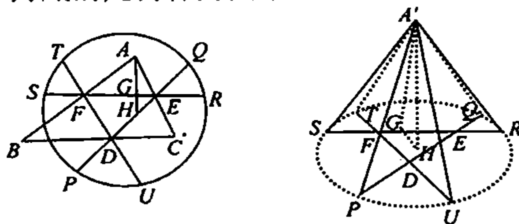


图5

事实上，设平面圆中的AH交EF于点G，则直线AH在翻折后为$A'-DEF$的斜高及其在底面的射影.

故$EF \perp$平面$A'GH$，从而$A'H \perp EF$.

同理$A'H \perp FD$. 所以$A'H \perp$底面DEF.

故以A'为顶点，$\odot H$为底的几何体为圆锥.

此时要证明的六条线段为这圆锥母线，所以结论成立.

四、解决与椭圆有关问题

压缩变换可使椭圆问题进行圆化处理，而其直观的几何模型是"圆柱上的截面与底面的变换关系"，利用它可将一些椭圆问题加以升维处理.

例5　试求椭圆$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$的内接$n$边形的面积$S$的最大值.

分析：如图6，构造底面半径为b的圆柱，截面椭圆的长、短轴长分别为$2a$、$2b$，椭圆内接n边形$A_1A_2\cdots A_n$在圆柱底面上射影为圆内接n边形$B_1B_2\cdots B_n$，显然截面与底面的夹角余弦值为$\dfrac{b}{a}$，若记n边形$B_1B_2\cdots B_n$的面积为S'，则由面积射影定理知：$S = \left(\dfrac{a}{b}\right)S'$.

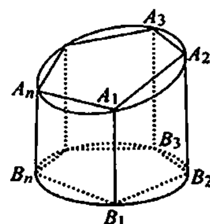


图6

所以欲使S最大，只要S'最大，而圆内接n边形的面积是以正n边形面积$\dfrac{n}{2}b^2\sin\dfrac{2\pi}{n}$为最大，

因此$S_{\max} = \dfrac{n}{2}ab\sin\dfrac{2\pi}{n}$.

巧妙进行空间转化解决与棱相切的球半径问题

073000　河北定州中学　赵立红

在对立体几何中的"切、接球"问题进行复习时，笔者发现学生对球与棱相切问题感到有些吃力，下面就两个典型的球与棱相切问题进行分析，与读者探讨.

例1　将一个钢球置于6根长度为$\sqrt{6}$米的钢管焊接成的正四面体钢架内，那么这个钢球的最大体积为____米^3.

解：四面体各棱长相等，因此钢球体积最大时即为与各条棱相切时，且切点为棱的中点(即与各表面正三角形相内切的圆的切点).

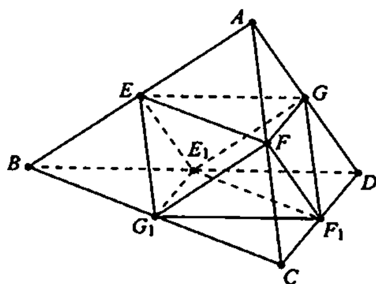


图1

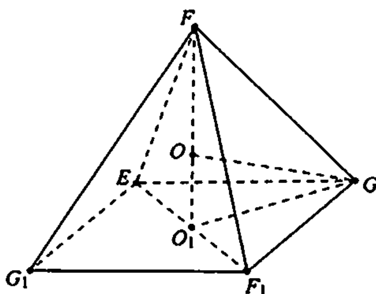


图2

法一：如图1所示，原问题转化为求由$EFGE_1F_1G_1$构成的正八面体的外接球问题，即求如图2所示的正四棱锥$F-EG_1F_1G$的外接球的体积. 设球心为O，球的半径为R，即$OG=R$，由题意可得$EG=EF=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，利用直角$\triangle OO_1G$、直角$\triangle FO_1G$，可得

$$FO_1^2+O_1G^2=FG^2, OO_1^2+O_1G^2=OG^2,$$

其中$OG=OF=R$，可得

$$FO_1=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore \left(\frac{\sqrt{3}}{2}-R\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=R^2, \text{得} R=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore V_{\max}=\frac{4}{3}\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3=\frac{\sqrt{3}}{2}\pi.$$

法二：如图3，原问题可转化为求过$EFGE_1F_1G_1$六点的外接球，进而转化为图4中求以$\triangle EFG$和$\triangle E_1F_1G_1$外接圆为上下底的圆柱的外接球问题，则球心为线段O_1O_2的中点O，

设$R=OG$，正四面体$ABCD$的高为h，有$(\sqrt{6})^2-\left(\sqrt{6}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{2}{3}\right)^2=h^2$，所以$h=2$.

因为$O_1O=\dfrac{1}{4}h$，$R^2=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2$，所以$R=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$V_{\max}=\dfrac{4}{3}\pi\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^3=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\pi$.

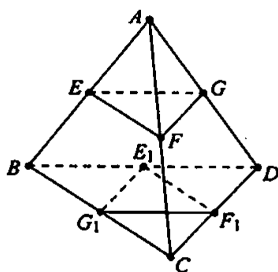


图3

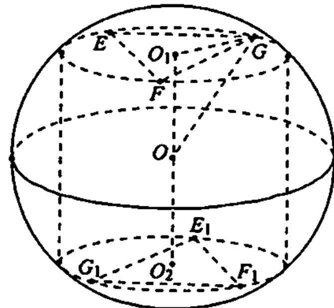


图4

例2　如图5所示, 把一个皮球放入由8根长均为20cm的铁丝接成的四棱锥形骨架内, 使皮球的表面与8根铁丝都有接触点, 则皮球的半径为____cm.

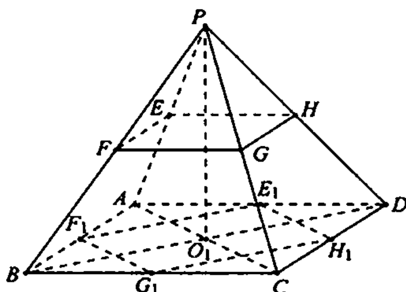


图5

解: 由题意分析可得, 皮球与四棱锥的切点为各棱中点, 问题为求过$EFGHE_1F_1G_1H_1$八点的外接球问题, 可转化为图6中圆台O_1O_2的外接球半径. 点O在O_1O_2上, 不妨设$OO_1=x$, 则$OO_1^2+O_1H_1^2=OH_1^2=R^2$, $OO_2^2+O_2H^2=OH^2=R^2$, $O_1O_2=\frac{1}{2}PO_1$, 由条件可得$PO_1=\sqrt{20^2-(10\sqrt{2})^2}=10\sqrt{2}$cm, $O_1H=10$cm, $OH=5\sqrt{2}$cm, 可解得$x=0$, 即O_1为球心, 则球的半径为10cm.

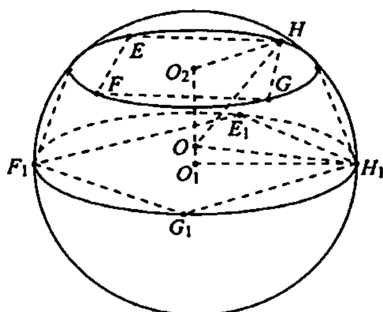


图6

变式: 高为$\frac{\sqrt{2}}{4}$的四棱锥$S-ABCD$的底面是边长为1的正方形, 点S、A、B、C、D均在半径为1的同一球面上, 则底面$ABCD$的中心与顶点S之间的距离为____.

解: 法一如图7, 可得点E为球心, $ES=EB=1$, 由Rt$\triangle ESM$、Rt$\triangle EBO$可得, $EM^2+SM^2=ES^2$, $EO^2+BO^2=EB^2$. $MO=\frac{\sqrt{2}}{4}$, 不妨设$EM=x$, 球的半径为1, 则有$\begin{cases}x^2+SM^2=1,\\ \left(\frac{\sqrt{2}}{4}+x\right)^2+\frac{1}{2}=1,\end{cases}$ 可得$SM=\frac{\sqrt{14}}{4}$, 所以$OS=\sqrt{\frac{14}{16}+\frac{2}{16}}=1$.

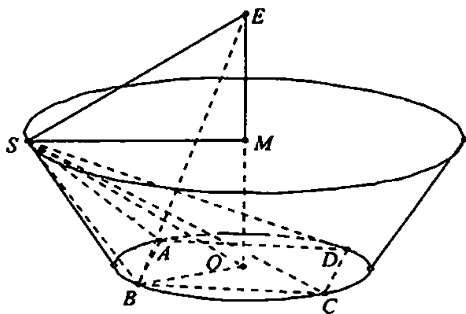


图7

法二: 如图8, 设四棱锥$S-ABCD$的外接球球心为E, 底面$ABCD$的中心为O, 则$OE\perp$平面$ABCD$, 在Rt$\triangle EOC$中, $EC=1, OC=\frac{\sqrt{2}}{2}$, 得$EO=\sqrt{EC^2-OC^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, 因为四棱锥$S-ABCD$的高为$SH=\frac{\sqrt{2}}{4}$, $SH/\!/EO$, 所以$SH=\frac{1}{2}EO$. 过点S作$SM\perp EO$交EO于点M, 则$EM=\frac{\sqrt{2}}{4}$, 在Rt$\triangle EMS$中, $ES=1$,

$$MS=\sqrt{ES^2-EM^2}=\sqrt{\frac{7}{8}},$$

所以

$$OH=\sqrt{\frac{7}{8}},$$

$$OS=\sqrt{OH^2+SH^2}=\sqrt{\frac{7}{8}+\frac{1}{8}}=1.$$

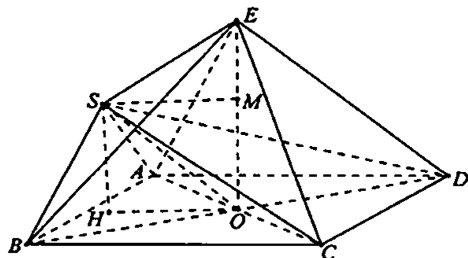


图8

综上, 此类问题最终多是转化为与多面体的顶点相接问题, 转化的关键是充分利用球心和顶点构造直角三角形, 利用勾股定理来解决长度问题.

图形的滚动

246736 安徽安庆枞阳浮山中学 章礼抗

图形的滚动问题是近年中考中比较引人注目的一个问题, 突出表现在它的解决比较难, 很多考生在短时间内难以找到解题思路. 下面就中考中出现的几例进行剖析和推广.

一、方形的滚动

方形的滚动在中考中多以正多边形为主, 而且多以顺时针为主, 并且近年出现的多是求扫过的面积.

例1 (2011年桂林市中考) 如图1, 将边长为 a 的正六边形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ 在直线 l 上由图1左的位置按顺时针方向向右作无滑动滚动, 当 A_1 第一次滚动到图1右的位置时, 顶点 A_1 所经过的路径的长为( )

(A) $\dfrac{4+2\sqrt{3}}{3}\pi a$; (B) $\dfrac{8+4\sqrt{3}}{3}\pi a$;

(C) $\dfrac{4+\sqrt{3}}{3}\pi a$; (D) $\dfrac{4+2\sqrt{3}}{6}\pi a$.

[分析] 本例主要考查弧长的计算、正多边形和圆、旋转的性质. 连结 A_1A_5、A_1A_4、A_1A_3, 作 $A_6C\perp A_1A_5$, 利用正六边形的性质分别计算出 $A_1A_4=2a$, $A_1A_5=A_1A_3=\sqrt{3}a$, 而当点 A_1 第一次滚动到图2位置时, 顶点 A_1 所经过的路径分别是以点 A_6, A_5, A_4, A_3, A_2 为圆心, 以 a, $\sqrt{3}a$, $2a$, $\sqrt{3}a$, a 为半径, 圆心角都为60°的五条弧, 然后根据弧长公式进行计算即可.

解: 连结 A_1A_5, A_1A_4, A_1A_3, 作 $A_6C\perp A_1A_5$, 垂足为点 C, 如图1.

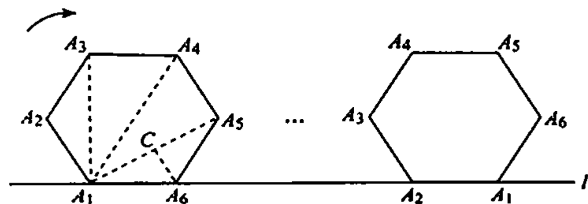


图1

$\because$ 六边形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ 为正六边形,

$\therefore A_1A_4=2a$, $\angle A_1A_6A_5=120°$,

$\therefore \angle CA_1A_6=30°$,

$\therefore A_6C=\dfrac{1}{2}a$, $A_1C=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$,

$\therefore A_1A_5=A_1A_3=\sqrt{3}a$.

当点 A_1 第一次滚动到图2位置时, 顶点 A_1 所经过的路径分别是以点 A_6, A_5, A_4, A_3, A_2 为圆心, 以 a, $\sqrt{3}a$, $2a$, $\sqrt{3}a$, a 为半径, 圆心角都为60°的五条弧,

$\therefore$ 顶点 A_1 所经过的路径的长 $=\dfrac{60\cdot\pi\cdot a}{180}+\dfrac{60\cdot\pi\cdot\sqrt{3}a}{180}+\dfrac{60\cdot\pi\cdot 2a}{180}+\dfrac{60\cdot\pi\cdot\sqrt{3}a}{180}+\dfrac{60\cdot\pi\cdot a}{180}=\dfrac{4+2\sqrt{3}}{3}\pi a$, 故选(A).

[点评] 本题考查了弧长公式: $l=\dfrac{n\cdot\pi\cdot R}{180}$, 也考查了正六边形的性质以及旋转的性质.

[推广] 将边长为 a 的正 n 边形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6\cdots A_n$ 在直线 l 上由图1左的位置按顺时针方向向右作无滑动滚动, 当点 A_1 第一次滚动到图1右的位置时, 顶点 A_1 所经过的路径的长为多少?

解析: 我们可以直接扣住半径、弦心距和半弦长构成直角三角形来解决. 分为两类:

(I) 当 n 为偶数时, 其对角线中 $A_1A_{\frac{n+2}{2}}$ 是直径, 其长为 $A_1A_{\frac{n+2}{2}}=\dfrac{a}{\sin\dfrac{180°}{n}}$.

$$A_1A_{\frac{n+2}{2}+1}=A_1A_{\frac{n+2}{2}-1}=a\cot\frac{180°}{n},$$

$$\cdots,$$

$$A_1A_{\frac{n+2}{2}+k}=A_1A_{\frac{n+2}{2}-k}$$

$$=\frac{a\cos\left(\frac{k}{n}\cdot 180^\circ\right)}{\sin\frac{180^\circ}{n}}\left(k=1,2,\cdots,\frac{n-2}{2}\right).$$

所以所有弧长之和为:

$$\frac{4a\pi}{n\sin\frac{180^\circ}{n}}\sum_{k=1}^{\frac{n-2}{2}}\cos\left(\frac{k}{n}180^\circ\right).$$

(II) 若n是奇数,

$$A_1A_{\frac{n+1}{2}}=A_1A_{\frac{n+3}{2}}=\frac{a\cos\frac{90^\circ}{n}}{\sin\frac{180^\circ}{n}},\cdots,$$

$$A_1A_{\frac{n+1}{2}-k}=A_1A_{\frac{n+1}{2}+1+k}$$

$$=\frac{a\cos\left(\frac{180^\circ}{n}(k+2)\right)}{\sin\frac{180^\circ}{n}}\left(k=0,1\cdots,\frac{n-1}{2}\right),$$

则所有弧长: $\frac{4a\pi}{n\sin\frac{180^\circ}{n}}\sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}}\cos\frac{180^\circ}{n}(k+2)$.

例2 (2011年北京市高考)如图2放置的边长为1的正方形$PABC$沿x轴滚动. 设顶点$P(x,y)$的轨迹方程是$y=f(x)$, 则$f(x)$的最小正周期为______; $y=f(x)$在其两个相邻零点间的图像与x轴所围区域的面积为______.

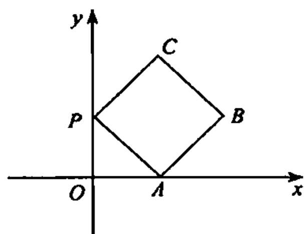


图2

分析: "正方形$PABC$沿x轴滚动"包括沿x轴正方向和沿x轴负方向滚动. 沿x轴正方向滚动指的是先以顶点A为中心顺时针旋转, 当顶点B落在x轴上时, 再以顶点B为中心顺时针旋转, 如此继续. 类似地, 正方形$PABC$可以沿x轴负方向滚动.

解析: 不难想象, 从某一个顶点(比如A)落在x轴的时候开始计算, 到下一次点A落在x轴上, 这个过程中四个顶点依次落在了x轴上, 而每两个顶点间距离为正方形的边长1, 因此该函数的周期为4. 下面考察点P的运动轨迹, 不妨考察正方形向右滚动, 点P从x轴上开始运动的时候, 首先是围绕点A运动$\frac{1}{4}$个圆, 该圆半径为1, 然后以点B为中心, 滚动到点C落地, 其间是以BP为半径, 旋转90°, 然后以点C为圆心, 再旋转90°, 这时候以CP为半径, 因此最终构成图像如图3.

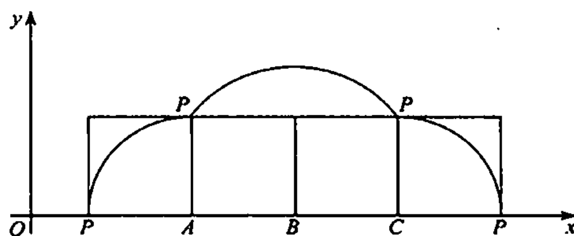


图3

因此不难算出这块面积为$\pi+1$.

[推广] 若是$PA=b$, $PC=a$的矩形, 点P起始在x轴上. 可知周期是$2(a+b)$, 则一周期内与x轴围成的面积为$(a^2+b^2)\frac{\pi}{2}+ab$.

二、圆的滚动

例3 (2011年河北省中考)如图4至图7中, 两平行线AB、CD间的距离均为6, 点M为AB上一定点. 思考: 如图4, 圆心为O的半圆形纸片在AB、CD之间(包括AB, CD), 其直径MN在AB上, $MN=8$, 点P为半圆上一点, 设$\angle MOP=\alpha$. 当$\alpha=$______度时, 点P到CD的距离最小, 最小值为______.

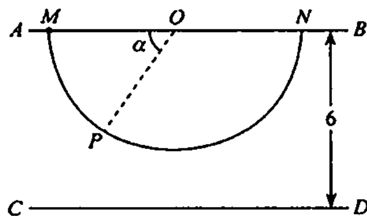


图4

探究一: 在图4的基础上, 以点M为旋转中心, 在AB、CD之间顺时针旋转该半圆形纸片, 直到不能再转动为止, 如图5, 得到最大旋转角$\angle BMO=$______度, 此时点N到CD的距离是______.

探究二: 将如图4中的扇形纸片NOP按下面对α的要求剪掉, 使扇形纸片MOP绕点M在AB、CD之间顺时针旋转.

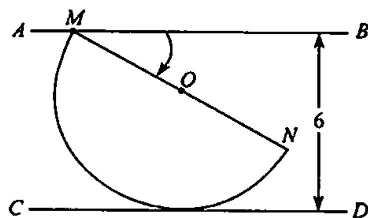


图5

(1) 如图6, 当$\alpha = 60°$时, 求在旋转过程中, 点P到CD的最小距离, 并请指出旋转角$\angle BMO$的最大值;

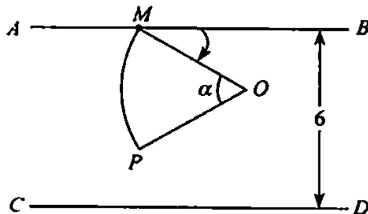


图6

(2) 如图7, 在扇形纸片MOP旋转过程中, 要保证点P能落在直线CD上, 请确定α的取值范围.

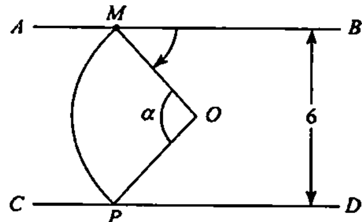


图7

$\left(\text{参考数据: } \sin 49° = \dfrac{3}{4}, \cos 41° = \dfrac{3}{4}, \tan 37° = \dfrac{3}{4}.\right)$

分析: 本例主要考查直线与圆的位置关系、点到直线的距离、平行线之间的距离、旋转的性质、解直角三角形. 根据两平行线之间垂线段最短以及切线的性质定理, 直接得出答案.

探究一: 根据$MN = 8$, $MO = 4$, 即可得出最大旋转角$\angle BMO = 30°$, 此时点N到CD的距离是2;

探究二: (1) 由已知得出点M与点P的距离为4, 当$PM \perp AB$时, 点P到AB的最大距离是4, 从而点P到CD的最小距离为$6-4=2$, 即可得出$\angle BMO$的最大值;

(2) 分别求出α最大值为$\angle OMH + \angle OHM = 30° + 90°$以及最小值$\alpha = 2\angle MOH$, 即可得出$\alpha$的取值范围.

[解]: 思考: 根据两平行线之间垂线段最短, 直接得出答案, 当$\alpha = 90°$时, 点P到CD的距离最小,

$\because MN = 8$,

$\therefore OP = 4$,

$\therefore$ 点P到CD的距离最小值为$6 - 4 = 2$.

故答案为: 90, 2;

探究一: $\because$ 以点M为旋转中心, 在AB、CD之间顺时针旋转该半圆形纸片, 直到不能再转动为止, 如图5. 设该半圆与CD的接触点为Y, 则Y为半圆的切点. 设直线YO与AB交于点U.

$\because MN = 8, MO = 4, OY = 4$,

$\therefore UO = 2$,

$\therefore$ 得到最大旋转角$\angle BMO = 30$度, 此时点N到CD的距离是2;

探究二: (1) 由已知得出点M与点P的距离为4.

$\therefore$ 当$PM \perp AB$时, 点P到AB的最大距离是4, 从而点P到CD的最小距离为$6-4=2$.

当扇形MOP在AB、CD之间旋转到不能再转时, $\overset{\frown}{MP}$与AB相切, 此时旋转角最大, $\angle BMO$的最大值为90°;

(2) 如图6, 由探究一可知, 点P是$\overset{\frown}{MP}$与CD的切线时, α达到最大, 即$OP \perp CD$, 此时延长PO交AB于点H, α最大值为$\angle OMH + \angle OHM = 30° + 90° = 120°$.

如图7, 当点P在CD上且与AB距离最小时, $MP \perp CD$, α达到最小.

连结MP, 作$HO \perp MP$于点H, 由垂径定理得出$MH = 3$. 在Rt$\triangle MOH$中, $MO = 4$,

$\therefore \sin \angle MOH = \dfrac{MH}{OM} = \dfrac{3}{4}$,

$\therefore \angle MOH = 49°$.

$\because \alpha = 2\angle MOH$,

$\therefore \alpha$最小为98°, α的取值范围为$98° \leqslant \alpha \leqslant 120°$.

[点评]: 此题主要考查了切线的性质定理以及平行线之间的关系和解直角三角形等知

识, 根据切线的性质求解题目是初中阶段的重点题型, 此题考查知识较多, 综合性较强, 要注意认真分析.

例4 (2011年兰州市中考) 已知一个半圆形工件, 未搬动前如图8所示, 直径平行于地面放置, 搬动时为了保护圆弧部分不受损伤, 先将半圆作如图所示的无滑动翻转, 使它的直径紧贴地面, 再将它沿地面平移50米, 半圆的直径为4米, 则圆心O所经过的路线长是______米.

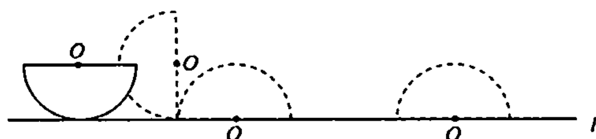


图8

解: 由图9可知, 圆心先向前走O_1O_2的长度即为四分之一圆的周长, 然后沿着弧O_2O_3旋转$\frac{1}{4}$圆的周长, 最后向右平移50米, 所以圆心总共走过的路程为圆周长的一半 (即半圆的弧长) 加上50, 由已知得圆的半径为2, 则半圆形的弧长$l=\frac{(90+90)\cdot\pi\cdot2}{180}=2\pi$.

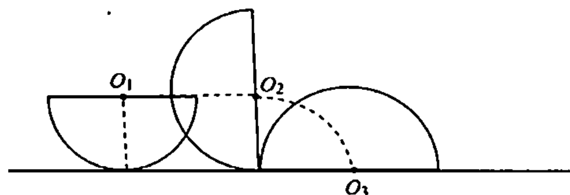


图9

所以, 圆心O所经过的路线长$=(2\pi+50)$米.

以上就这几类滚动翻转问题进行了剖析, 但滚动翻转的图形很多, 我们在解决时, 一定要抓住一点, 即明确每次滚动翻转中谁作圆心(或中心), 对应轨迹中谁作半径; 其次要先绘出草图, 这样解决起来也就方便多了.

(上接第11-1页)

用的研究, 后来发表在1997年《数学学习》杂志上的"关于心理学、历史认识论与数学教学: 走向数学的社会文化史 (On psychology, historical epistemology, and the teaching of mathematics: Towards a socio-cultural history of mathematics)". 1990年代后期他继续研究, 运用Vygotsky、Bakhtin以及Voloshinov等人的理论, 制定出"符号-文化框架", 这个框架是用来调查学生使用符号的方式, 以及当他们初次接触将模式代数一般化时赋予符号意义的方式. 到目前为止他引用率最高的一篇论文是2003年发表在《数学思维与学习(Mathematical Thinking and Learning)》杂志上的"手势、说话与符号的萌芽: 从符号-文化角度研究学生如何一般化(Gestures, speech, and the sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to students' types of generalization)". 之后他在符号-文化学习理论上的贡献可以看他新近发表的文章, 如2010年在《数学教育研究(Research in Mathematics Education)》杂志发表的文章中他阐述了思维是一种感官的借助符号进行反省的夹杂着动作、手势和动脑的活动的观点, 在2008年《数学教育中的符号学》(Semiotics in Mathematics Education) 一书中, 他有一章论述了学习是知 (knowing) 和成为 (being) 互相交织的过程. Luis Radford有超过170篇的出版物, 其中很多都经常被引用, 这不仅表明他的研究多产, 也说明受到了世界范围内的广泛关注.

Luis Radford获得了Laurentienne大学2004–2005年度的研究杰出奖, 也在2005年被提名角逐加拿大社会科学和人文研究理事会金奖, 他的研究项目连续三次都在加拿大社会科学和人文研究理事会 (教育1) 的评比 (2004–2007年、2007–2010年和2010至2013年) 中排名第一.

总之, Luis Radford赢得2011年Hans Freudenthal奖当之无愧.

资料来源:

http://www.mathunion.org/icmi/news

构造函数证明一类数列和型不等式

435000 湖北省黄石市第一中学 杨瑞强

我们把形如 $\sum\limits_{k=1}^{n} f(k) < c$ (c为常数)或 $\sum\limits_{k=1}^{n} f(k) < g(n)$ 的不等式称为数列和型不等式. 数列和型不等式的证明是中学数学的重点和难点之一, 通常在竞赛和高考压轴试题中出现. 此类不等式往往用数学归纳法、放缩法处理, 技巧性较强, 学生在短时间内难以解决. 下面介绍一种通过构造函数, 利用函数单调性的方法证明此类数列和型不等式.

例1 求证: 对于任意正整数n, 均有 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n} \geqslant \ln\frac{e^n}{n!}$ (e为自然对数的底数).

证明: 先将左边看成数列$\{a_n\}$的前n项和, 其中 $a_n=\frac{1}{n}$; 再将右边看成数列$\{b_n\}$的前n项和 $S_n=\ln\frac{e^n}{n!}$, 当$n\geqslant 2$时, $b_n=S_n-S_{n-1}=\ln\frac{e^n}{n!}-\ln\frac{e^{n-1}}{(n-1)!}=\ln\frac{e}{n}=1-\ln n$, 当$n=1$时, $b_1=S_1=1$, 符合上式. 因此, $b_n=1-\ln n\,(n\in\mathbf{N}^*)$.

原问题现转化为: 当$n\in\mathbf{N}^*$时, 证明$a_n\geqslant b_n$, 即证明$\frac{1}{n}\geqslant 1-\ln n$, 它是原命题的充分条件.

设$f(x)=\frac{1}{x}-1+\ln x$, 则$f'(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x^2}$. 当$x\geqslant 1$时, $f'(x)\geqslant 0$恒成立, 函数$f(x)$在$[1,+\infty)$上单调递增, 因此$f(x)\geqslant f(1)=0$, 即$\frac{1}{x}\geqslant 1-\ln x\,(x\geqslant 1)$.

分别令$x=1,2,3,\cdots,n$, 相加即得 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\geqslant\ln\frac{e^n}{n!}$.

故对于任意正整数n, 均有

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\geqslant\ln\frac{e^n}{n!}.$$

例2 证明: 对于任意正整数m、n, 不等式 $\frac{1}{\ln(m+1)}+\frac{1}{\ln(m+2)}+\cdots+\frac{1}{\ln(m+n)}>\frac{n}{m(m+n)}$ 恒成立.

证明: 对每一个确定的正整数m而言, 先将左边看成数列$\{a_n\}$的前n项和, 其中 $a_n=\frac{1}{\ln(m+n)}$; 再将右边看成数列$\{b_n\}$的前n项和$S_n=\frac{n}{m(m+n)}$, 当$n\geqslant 2$时,

$$b_n=S_n-S_{n-1}=\frac{n}{m(m+n)}-\frac{n-1}{m(m+n-1)}=\frac{1}{(m+n)(m+n-1)},$$

当$n=1$时, $b_1=S_1=\frac{1}{m(m+1)}$, 符合上式. 因此, $b_n=\frac{1}{(m+n)(m+n-1)}(n\in\mathbf{N}^*)$.

原问题现转化为: 当$n\in\mathbf{N}^*$时, 证明原命题的充分条件$a_n>b_n$成立, 即证明 $\frac{1}{\ln(m+n)}>\frac{1}{(m+n)(m+n-1)}$, 亦即证明 $\ln(m+n)<(m+n)(m+n-1)$.

设$f(x)=x^2-x-\ln x$, 则$f'(x)=2x-1-\frac{1}{x}=\frac{2x^2-x-1}{x}=\frac{(x-1)(2x+1)}{x}$.

当$x>1$时, $f'(x)>0$恒成立, 函数$f(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增, 因此$f(x)>f(1)=0$, 即$\ln x<x^2-x$. 于是, 当$x>1$时,

$$\frac{1}{\ln x}>\frac{1}{x^2-x}=\frac{1}{(x-1)x}.$$

在上面不等式中分别令$x=m+1,m+2,\cdots,m+n$, 再相加可以得到 $\frac{1}{\ln(m+1)}+\frac{1}{\ln(m+2)}+\cdots+\frac{1}{\ln(m+n)}>\frac{1}{m(m+1)}+\frac{1}{(m+1)(m+2)}+\cdots+\frac{1}{(m+n-1)(m+n)}=$

基于数学实验为探究手段的高考数学命题新视角

200092　上海市杨浦区教师进修学院　王国江

从2000年以来, 上海高中可使用规定的计算器进行数学问题探究, 相应地, 高考数学题中也出现了对数学实验的思想方法、能力的考查. 例如: 借助计算器对数学问题进行验证、探究, 以及折纸实验等都在高考题中得到了不同的体现. 所谓数学实验是指: 为获得某种数学理论, 验证某个数学猜想, 解决某类数学问题, 实验者运用一定的工具, 在思维活动的参与下, 在典型的实验环境中或特定的实验条件下所进行的一种数学探索活动. 在高考中以数学实验为探究手段的命题新视角也逐步形成.

一、展示数学直观形象的“解释性数学实验”

解释性数学实验能更好地将抽象的数学问题具体化、直观化、形象化, 在某些数学领域, 解释性实验具有常规思维方法不可替代的优越性, 它能将问题的切入点直观地展示在学生面前. 学生通过对实物、模型的观察和实验操作可以“实实在在”地体验思维的形成过程和“看到”其实验结果. 例如, 图1所示, 是一个两节圆形管焊接而成的弯管, 其中每一节都是斜截圆柱而成. 如果把其中一个斜截圆柱的侧面沿着AA_1剪开并摊平, 曲线A_1BCDA_1'是什么曲线? 学生可能会猜想是圆弧或抛物线段等二次曲线的一部分. 让学生模拟纸片围住水杯, 观察其相应展开图的形状, 如图2所示, 学生惊讶: 是正弦曲线或余弦曲线! 再根据图1中所给条件 (图中单位: cm), 问加工这一圆形弯管, 约需要多少面积的材料.

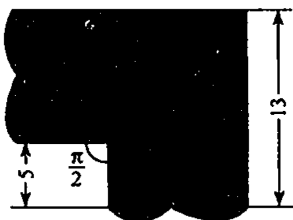


图1

$\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{m+1}\right)+\left(\frac{1}{m+1}-\frac{2}{m+2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{m+n-1}-\frac{1}{m+n}\right)=\frac{1}{m}-\frac{1}{m+n}=\frac{n}{m(m+n)}$. 故对任意正整数$m$、$n$, 不等式$\frac{1}{\ln(m+1)}+\frac{1}{\ln(m+2)}+\cdots+\frac{1}{\ln(m+n)}>\frac{n}{m(m+n)}$恒成立.

例3　证明: $\frac{\ln 2}{3}+\frac{\ln 3}{4}+\frac{\ln 4}{5}+\cdots+\frac{\ln n}{n+1}<\frac{n(n-1)}{4}(n\in\mathbf{N}^*$且$n>1)$.

证明: 当$n\geqslant 2$时, 记$a_n=\frac{\ln n}{n+1}$, $b_n=\frac{n(n-1)}{4}-\frac{(n-1)(n-2)}{4}=\frac{n-1}{2}$.

原问题现转化为: 当$n\in\mathbf{N}^*$且$n>1$时, 证明原命题的充分条件$\frac{\ln n}{n+1}<\frac{n-1}{2}$成立, 即证明$2\ln n<n^2-1$.

设$f(x)=2\ln x-x^2+1$, 则$f'(x)=\frac{2}{x}-2x=\frac{2(1+x)(1-x)}{x}$. 当$x>1$时, $f'(x)<0$恒成立, 函数$f(x)$在$(1,+\infty)$上单调递减, 因此$f(x)<f(1)=0$, 即$2\ln x<x^2-1$, 从而$\frac{\ln x}{x+1}<\frac{x-1}{2}(x>1)$. 分别令$x=2,3,4,\cdots,n$, 相加即得$\frac{\ln 2}{3}+\frac{\ln 3}{4}+\frac{\ln 4}{5}+\cdots+\frac{\ln n}{n+1}<\frac{n(n-1)}{4}(n\in\mathbf{N}^*$且$n>1)$.

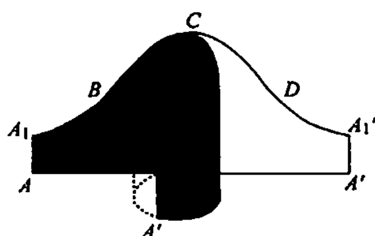


图2

二、培养学生合理猜想的“验证性数学实验”

验证性实验可借助计算器作为一种运算工具, 利用其强大的求值、计算等功能来验证数学结论的存在性以及正确性, 可以简便地解决诸如函数及其性质、图形的数形关系、轨迹、方程求解等问题, 进而展示数学问题的背景、过程、结果, 揭示数学问题的“庐山真面目”.

例如, 2001年上海秋季高考数学理科第16题: 用计算器验算函数$y=\dfrac{\lg x}{x}(x>1)$的若干个值, 可以猜想下列命题中的真命题只能是……………………………………( )

(A) $y=\dfrac{\lg x}{x}$在$(1, +\infty)$上是单调减函数;

(B) $y=\dfrac{\lg x}{x}, x\in(1, +\infty)$的值域为$\left(0, \dfrac{\lg 3}{3}\right]$;

(C) $y=\dfrac{\lg x}{x}, x\in(1, +\infty)$有最小值;

(D) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\lg n}{n}=0, n\in\mathbf{N}^*$.

为了能够批量给出数据并直观比较数据之间的联系, 可采用计算器中的TABLE模式. 在“$f(x)=$”后输入“$\dfrac{\lg x}{x}$”, 根据题目中提供的信息, 不妨先研究区间$(0,20]$中的情况, 建议第一次实验的步长选用1. 观察数据发现, 函数值先增后减, 在$x=3$处较大, 故(A)错误. 为考查函数是否在$x=3$处取得最大值, 则开展第二次实验, 研究的范围在$x=3$附近, 区间选择$[2, 4]$, 步长选用0.1. 观察数据发现, $x=2.7$时函数值较大, 故(C)错误. 为考查(B)、(D)两者哪个正确, 需将研究区间扩大, 故需再进行几次实验. 通过对区域: $[1,20]$、$[1,100]$、$[1,1000]$进行列表观察, 可以猜测随着x的增大, $f(x)$的值无限趋近于0, 故(D)为正确选项.

三、借助计算器进行数学问题的“操作实验”

借助于计算器, 数学已经成为一门实验学科, 它扩大了数学实践的内容和范围. 从模型的建立到演绎、归纳与分析、算法设计的评估等, 都可通过计算器来实现, 它为探索数学问题的规律提供了方便、可行的新途径. 例如, 2011年春季高考第23题: 对于给定首项$x_0>\sqrt[3]{a}(a>0)$, 由递推式$x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(x_n+\sqrt{\dfrac{a}{x_n}}\right)(n\in\mathbf{N})$得到数列$\{x_n\}$, 且对于任意的$n\in\mathbf{N}$, 都有$x_n>\sqrt[3]{a}$. 用数列$\{x_n\}$可以计算$\sqrt[3]{a}$的近似值.

(1) 取$x_0=5$, $a=100$, 计算x_1、x_2、x_3的值(精确到0.01), 归纳出x_n、x_{n+1}的大小关系;

(2) 当$n\geqslant 1$时, 证明: $x_n-x_{n+1}<\dfrac{1}{2}(x_{n-1}-x_n)$;

(3) 当$x_0\in[5, 10]$时, 用数列$\{x_n\}$计算$\sqrt[3]{100}$的近似值, 要求$|x_n-x_{n+1}|<10^{-4}$, 请你估计n, 并说明理由.

利用计算器最简单的算术模式, 就能实现数字运算的迭代, 在第(1)问中, 输入“5”, 按等号确认, 使“Ans”中的数为5; 输入“$\dfrac{1}{2}\left(\text{Ans}+\sqrt{\dfrac{100}{\text{Ans}}}\right)$”, 按[=], 则出现了$x_1$的值, 再按[=]则出现$x_2$的值, 以此类推, 很快能够得到此后各项的值:

$x_1=4.74$, $x_2=4.67$, $x_3=4.65$, 猜想$x_{n+1}<x_n$; 利用计算器的迭代功能, 在获得数据的效率上大大提高, 不仅节约了学生研究问题的时间, 而且从迭代的过程当中也能够充分反映出递推关系的本质. 在第(2)问的证明中, 利用计算器进行验证的方法显然不合理. 第(3)问是在前两题的基础上, 将初始值x_0放到了一个区间当中, 为学生利用计算器直接得到结果设置了一定的障碍. 本小题首先需要利用相应的数学知识, 对区间$[5,10]$内的数值进行分析, 从而选择最具代表性的初始值x_0进行迭代, 从而保证研究的结果能够对区间$[5,10]$内的所有

数值均成立, 故取$x_0 = 10$进行实验. 按照第(1)小题实验的过程, 对本问题再次开展迭代实验: 输入"10", 按等号确认, 使"Ans"中的数为10; 输入"$\frac{1}{2}\left(\text{Ans}+\sqrt{\frac{100}{\text{Ans}}}\right)$", 连续按[=], 获得一系列的数据并记录下来, 根据计算器迭代发现, 经过至少10次迭代, 基本可以达到$|x_n - x_{n+1}| < 10^{-4}$.

试题背景探究: 一是$\sqrt[3]{a}$的由来. 事实上是函数$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \sqrt{\frac{a}{x}}\right)$对应的方程$f(x) = x$的根为$x = \sqrt[3]{a}$;

二是为什么当$x_0 > \sqrt[3]{a}$ $(a > 0)$时, 对于任意的$n \in \mathbf{N}$, 都有$x_n > \sqrt[3]{a}$? 函数$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \sqrt{\frac{a}{x}}\right)$, 在$(\sqrt[3]{a}, +\infty)$上是单调递增的, 即$f(x) > f(\sqrt[3]{a}) = \sqrt[3]{a}$.

于是知当$x_0 > \sqrt[3]{a}$时, 恒有$x_n > \sqrt[3]{a}$成立;

三是为什么上述算法可以计算近似值? 易知数列$\{x_n\}$单调递减, 且$x_n > \sqrt[3]{a}$所以, 数列$\{x_n\}$存在极限, 设$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n}\right) = x_n = x$, 则有$x = \dfrac{x+\sqrt{\frac{a}{x}}}{2} \Rightarrow x = \sqrt[3]{a}$, 当$n \to +\infty$时, $x_n \to \sqrt[3]{a}$. 所以, 上述算法可以计算近似值.

四、培养空间想象能力的"折纸"实验考查

"折纸实验"是指: 通过动手操作或模拟空间中的点、线、面元素位置关系变化探究解题过程, 如翻折、展开、旋转、射影等. 这种动态实验赋予静态立体几何问题以"生命"活力, 也使其更具有挑战性、开放性.

例如, 2002年全国高考文科最后一题的"剪拼"问题. 给出两块相同的正三角形纸片(如图3, 图4), 要求用其中一块剪拼成一个正三棱锥模型, 另一块剪拼成一个正三棱柱模型, 使它们的全面积都与原三角形的面积相等, 请设计一种剪拼方法, 分别用虚线标示在图3、图4中, 并作简要说明; 如果给出的是一块任意三角形的纸片(如图5), 要求剪拼成直三棱柱模型, 使它的全面积与给出的三角形的面积相等, 请设计一种剪拼方法, 用虚线标示在图5中, 并作简要说明.

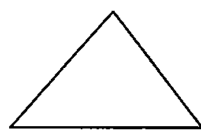
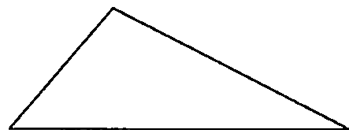

图3


图4


图5

由于图形折叠与展开必然会引起部分元素位置关系的变化, 就过程而言有认识上的分解与综合, 方法上的折叠与展开, 观念上的空间→平面→空间的转化, 正是这种动态性的存在使有些问题结果变得不可确定, 探究这类问题可以激发学生发散思维和创新思维意识.

善于运用动态变化的观点, 去观察问题、分析问题, 通过实验操作去获得合理猜想, 并予论证, 这一思想在上海卷高考题中也有体现. 例如: 2010年上海卷理科第12题: 如图6所示, 在边长为4的正方形纸片$ABCD$中, AC与BD相交于点O, 剪去$\triangle AOB$, 将剩余部分沿OC、OD折叠, 使OA、OB重合, 则以A、B、C、D、O为顶点的四面体的体积为______. 翻折后的几何体为底面边长为4, 侧棱长为$2\sqrt{2}$的正三棱锥, 高为$\frac{2\sqrt{6}}{3}$所以该四面体的体积为$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 16\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{2\sqrt{6}}{3} = \frac{8\sqrt{2}}{3}$.

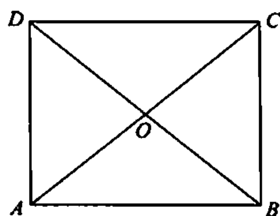


图6

教学中应提倡让学生从实际问题出发, 通过演示、观察、动手操作与实验, 获得对抽象的数学概念、定理、结论等的感性认识, 再通过归纳、猜想与类比的加工, 把感性知识上升为理性认识的过程. 在教师的启发和引导下, 实验过程不仅会加深学生对学习过程的感悟与体验, 而且能培养学生独立思考能力、创新意识与解决问题的能力.

例谈解决古典概型问题的三种方法

313200 浙江省德清县高级中学 江战明

排列组合和概率问题是高中数学里的“另类”，学生对其爱恨交加，爱的是若能悟到问题的本质，不仅可以快速解题，而且还会自信大增；恨的是若不能理出头绪，枚举又非常繁琐甚至无法解题，这时不仅让人急躁不安，还会使人信心受挫．实际上，对于基本事件总数较少的古典概型，枚举不失为一种有效的解题方法，但若基本事件总数较多时，命题者的意图一般都不是检测学生对枚举法的掌握，而是考查学生应用排列组合思想或计数原理解决概率问题的能力．下面通过一则案例，谈谈解决古典概率题的三种方法，以期抛砖引玉，为古典概型教学“添砖加瓦”．

1．案例展示与分析

问题：某单位的迎新年活动中有一个节目，参与者掷一颗骰子连续三次，制定规则如下：掷出的点数分为三组(1, 6)，(2, 5)，(3, 4)，若其中有连续两次掷出的点数在同一组，如“1, 6, 3”、“1, 1, 4”、“5, 3, 4”等，则参与者获奖，现求参与者获奖的概率．

这是某一次高三课堂练习中的一道题，笔者发现有好几个学生“卡”在此题上，其他有些干脆空着，有些就一个正确答案，有些在边上写得密密麻麻了，但最后得出了正确答案．在收完试卷后，笔者叫了相应的几位学生来到办公室问：“你们是怎么解此题的？”听完学生的回答，笔者忽然对古典概型的教学有了新的想法．

根据学生的回答，笔者分析整理学生的解答并附上个人点评如下．

1.1 观察表象 以枚举入手

一学生说，看到这道题目首先想到的就是枚举法，虽然知道过程可能比较繁，但有心理准备．于是在比较平静的心态下凭着顽强的毅力和较小的技巧，枚举出了所有满足条件的结果．

学生解答：先考虑至少连续两次掷出的点数落在(1, 6)的基本事件，此类事件可以分为两小类，一类是保证第一、二两次掷出的点数连续落在(1, 6)内；另一类是保证第二、三两次掷出的点数落在(1, 6)内．

枚举第一类所得结果(保证第1、2两次掷出的点数落在(1, 6)内)如下表1所示：

表1

(1, 1, 1)	(1, 1, 2)	(1, 1, 3)	(1, 1, 4)	(1, 1, 5)	(1, 1, 6)
(1, 6, 1)	(1, 6, 2)	(1, 6, 3)	(1, 6, 4)	(1, 6, 5)	(1, 6, 6)
(6, 1, 1)	(6, 1, 2)	(6, 1, 3)	(6, 1, 4)	(6, 1, 5)	(6, 1, 6)
(6, 6, 1)	(6, 6, 2)	(6, 6, 3)	(6, 6, 4)	(6, 6, 5)	(6, 6, 6)

枚举第二类所得结果(确保第2、3两次掷出点数落在(1, 6))如下表2所示：

表2

(1, 1, 1)	(2, 1, 1)	(3, 1, 1)	(4, 1, 1)	(5, 1, 1)	(6, 1, 1)
(1, 1, 6)	(2, 1, 6)	(3, 1, 6)	(4, 1, 6)	(5, 1, 6)	(6, 1, 6)
(1, 6, 1)	(2, 6, 1)	(3, 6, 1)	(4, 6, 1)	(5, 6, 1)	(6, 6, 1)
(1, 6, 6)	(2, 6, 6)	(3, 6, 6)	(4, 6, 6)	(5, 6, 6)	(6, 6, 6)

对比上述表1、2可以发现，两表中的第一列和最后一列所表示的点数是连续三次都落在(1, 6)内，即此两列数据在两表中都出现了，所以满足条件的基本事件数为：$2\times(4\times6)-8=40$．

同理可得，连续两次掷出的点数落在(2, 5)和(3, 4)内的基本事件数也是40(枚举过程略)，由于基本事件的总数是$6\times6\times6=216$个，所以参与者获奖的概率为$P=\dfrac{120}{216}=\dfrac{5}{9}$．

点评：从上述的解题过程可以看出，在解决古典概率问题时，枚举法确实相当管用，即

使基本事件总数较多, 若能按照一定的规律枚举, 做到不重不漏也是有可能的, 当然这样的枚举肯定是伤神又耗时, 一般也是无奈之举.

1.2 总结规律 从排列组合出发

有两位学生这样说, 他们开始也想枚举出所有满足条件的结果, 但试了一下之后发现有明显的规律, 于是通过排列组合计算出了结果.

学生解答: 可以把满足条件的基本事件分为两类: 一类是掷出的点数仅有2次落在同一组, 另外一类是掷出的点数三次都落在同一组. 下面以掷出点数落在(1, 6)组为例说明.

第一类, 若只有第一、二两次掷出的点数在(1, 6)组内, 那么第一次掷出的点数可以是1或6, 第二次掷出的点数也可以是1或6, 而第三次掷出的点数则是2、3、4、5中的任意一个, 所以有$C_2^1\cdot C_2^1\cdot C_4^1$种; 若只有第二、三两次连续掷出的点数落在(1, 6)组内, 那么第一次掷出的点数可以是2、3、4、5中的任意一个, 而二、三两次掷出的点数必须为1、6之一, 所以有$C_4^1\cdot C_2^1\cdot C_2^1$种. 第二类, 若三次掷出的点数都落在(1, 6)组内, 那么显然三次掷出的点数都必须是1、6之一, 即$C_2^1\cdot C_2^1\cdot C_2^1$种. 由上述分析可知, 三次掷出的点数有连续两次落在(1, 6)的基本事件数为: $C_2^1\cdot C_2^1\cdot C_4^1+C_4^1\cdot C_2^1\cdot C_2^1+C_2^1\cdot C_2^1\cdot C_2^1=40$种. 同理可得, 落在(2, 5)和(3, 4)满足条件的基本事件数也都是40, 且不会与连续两次落在(1, 6)的事件同时发生, 所以$P=\frac{120}{216}=\frac{5}{9}$.

点评: 跟前面的枚举法相比, 本解法有了明显的改进, 运用排列组合思想解决古典概率问题是常用方法之一, 比枚举法更多了整体化的思想方法.

1.3 越过表象 直击概率本质

还有两位学生说, 前面的同学都做"繁"了, 这道题目根本不需要枚举或用排列组合去解, 因为三次掷骰子是三个独立事件, 只要利用独立事件乘积的概率性质做就可以了, 计算非常简单.

学生解答: 因为掷骰子3次是独立重复试验, 所以不管第一次掷出的点数是多少, 第二次掷出的点数落在同组的概率就为$\frac{2}{6}$, 落在不同组的概率为$\frac{4}{6}$, 第三次掷出的点数落在前一组与不落在前一组的概率仍然分别是$\frac{2}{6}$和$\frac{4}{6}$, 所以掷骰子三次, 至少有两次连续落在同一组的概率为$P=1\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{4}{6}+1\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{6}+1\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{6}=\frac{5}{9}$.

点评: 可能是受困于三组具体数据和"举例说明", 前面三位学生的解题方法都局限于就题论题, 其实这6个数字不管怎么分组, 只要两个一组, 获奖的概率是不会改变的, 而这个概率值只需通过独立事件乘积的概率和互斥事件和的概率的运算性质就可以简单计算得到.

2. 教师感悟

笔者统计本班学生在该题的表现: 有4位学生没解出, 空着; 12位学生耗时较多但枚举出了正确结果, 6位运用了枚举法但没算出正确的答案; 8位运用排列组合比较顺利地解决了此问题; 16位运用独立重复试验快速算出了答案.

笔者有些"愕然", 为什么会有这么多学生没看到问题的本质, 难道仅仅是试题迷惑性比较强, 还是因为学生智力问题. 笔者开始思考: 古典概型教学的"着力点"到底在哪里? 方法有好、差之分吗? 如何才能让学生既快又准地找出解题方法?

3. 教学启示

从上述案例的解答来看, 方法确实有好、差之分, 但笔者认为问题的关键不是要去区分哪种方法更好, 而是应该更加关注概率题的主要途径, 因为方法的好、差会随着题型的改变而有所变化, 但概率解题的主要途径一般是不会变的. 下面从三个方面, 谈谈对古典概型教学想法.

2.1 枚举法应有合理的地位

通过这个案例的研究, 我们可能会武断地认为在解决古典概型的三条途径中, 使用枚举法是"最烦、最差"的, 其实不然: 第一, 当基本事件总数较少但情况又有点复杂时, 枚举法一清二楚, 既快又准; 第二, 枚举法可能会是部分学生的第一反应, 如果学生能熟练掌握枚举技巧——树形图、列表法等, 那么大部分问题是可以成功解决的; 第三, 即使枚举失败, 笔者也不认为枚举过程是无用的, 很多概率问题的解决都是在枚举过程中发现规律, 然后再用数学模型解决, 上述案例也可算一个例子; 第四, 在紧张的考试过程中, 是否一定能想到其他方法,

若根本想不到其他方法, 那么枚举法就成了唯一的选择. 因此, 笔者认为枚举法是解决概率问题最基本的途径, 学生必须熟练掌握.

2.2 善于运用排列组合思想

确实, 当满足条件或不满足条件的基本事件数都比较多, 或是一些以排列组合为背景的概率问题, 用枚举法总会显得非常"繁琐", 此时一般需要运用排列组合思想解题. 然而, 因为古典概型中很多问题都发生在排列、组合情境中, 以至部分学生片面地以为古典概率问题实际就是排列组合问题, 这样的想法显然是不成熟的, 选用合理的排列组合公式需要枚举法作为基础.

2.3 正确区分独立重复试验

在上述案例中, 之所以出现了前面两种相对"较差"的方法, 那是因为教、学没能落实到位, 使得部分学生受到试题表象的"迷惑", 从而忽视了独立重复试验的本质. 因此, 在概率教学中, 在解题之前弄清问题背景至关重要, 一个以独立重复试验为背景的问题, 如果选择了枚举法或排列组合法, 那么解题过程相对繁琐也就在情理之中了, 本案例就是一个例子.

因此, 从广义上讲方法无好、差之分, 关键看是否适合. 古典概型教学的"着力点"应该在解题的三条途径上, 因为三条途径谁都有可能通往问题的"本质", 只有看到问题的"源", 才有可能选好合适的途径而快速、准确地解题. 那么怎样才能让学生正确区分三条不同途径, 笔者认为可以通过精选题组让学生对比研究三类试题, 使学生在实践中磨练, 等积累到了一定量的题型, 学生自然能快速、顺利地解题.

参考文献

[1] 姜坤崇. 一道高考题的一般化及引申[J]. 河北理科教学研究, 2011(3): 11-13.

~~~~~~

(上接第11-14页)

点 P_2'、P_3' 的坐标分别为 $P_2'(\cos(\alpha+\theta),\sin(\alpha+\theta))$, $P_3'(\cos(\beta+\theta),\sin(\beta+\theta))$,

利用两点间的距离公式将等式 $|P_2P_3|=|P_2'P_3'|$ 坐标化, 整理得

$\cos(\alpha+\theta)\cos(\beta+\theta)+\sin(\alpha+\theta)\sin(\beta+\theta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$. ················ (*)

师: 你能由上式得到 $\cos(\alpha-\beta)$ 的表达式吗?

生: 令 $\theta=-\beta$ 或 $-\alpha$ 可得 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$. ··················(1)

师: (1) 式对任意角 α、β 都成立, 这个公式叫做两角差的余弦公式.

在 (1) 中, 用 $-\beta$ 代替 β, 可得两角和的余弦公式

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$. ·· (2)

(以下略).

本设计从诱导公式这一特例入手, 提出问题, 联系学生熟知的平方关系 $1=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$, 自然合理地给出公式 $\cos(\alpha-\beta)$ 的形式. 在公式 $\cos(\alpha-\beta)$ 的推导过程中, 利用旋转不变量导出关系式 (*), 将 (*) 特殊化, 令 $\theta=-\beta$ 自然地得到了公式, 使公式的证明水到渠成. 本设计的指导思想是从学生的"最近发展区"入手, 用问题引路, 让学生体验了猜想—验证—证明的学习过程. 教学过程是否顺畅, 关键在于问题的设计是否自然合理. 一个好的教学设计不在于教师讲清问题的解法, 而在于教师自然地引导学生获得问题的解决. 从学生的数学现实出发, 设计合理的问题, 实现教师指导下的自主探究的学习方式是我们课堂教学不变的追求.

参考文献

[1] 励志英等. 两角和的余弦公式[J]. 中学数学, 1995(7): 11-12.

[2] 杨育池. 多一点精心预设融一份动态生成[J]. 数学通报, 2009(11): 34-38.

[3] 胡小莉. "两角差的余弦公式"教学设计[J]. 中小学数学(高中版), 2009(7-8): 47-49.
~~~~~~

排序不等式的应用

056002 河北省邯郸市第一中学 马进才

新课程将排序不等式与柯西不等式放在选修4-5不等式专题中, 成为高中数学新增内容. 排序不等式作为基础而重要的不等式, 它结构优美、思想简单明了, 便于记忆和理解. 但如何运用它来解决问题, 学生常束手无策, 不得要领. 其实, 应用排序不等式解题的关键在于构造出它所需要的两组数列, 然而构造数列的过程奥妙无穷, 需要不断分析、探讨, 积累经验才能运用得法.

一、排序不等式的另一种表述形式

设 $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots a_n$, $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \cdots \leqslant b_n$ 为两组实数, $c_1, c_2, \cdots c_n$ 是 $b_1, b_2, \cdots b_n$ 的任一排列, 令矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix},$$

$$B=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_n & b_{n-1} & \cdots & b_1 \end{pmatrix}.$$

我们称 A 为顺序矩阵, B 为乱序矩阵, C 为反序矩阵, 它们的列积和 (同列相乘再相加) 有下面的结论:

$a_1b_1+a_2b_2+\cdots a_nb_n \geqslant a_1c_1+a_2c_2+\cdots+a_nc_n \geqslant a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots a_nb_1$,

即: 顺序列积和≥乱序列积和≥反序列积和.

二、应用举例

1. 排序不等式的基本应用

排序不等式在解决一些常见不等式时, 具有简单直观的特点, 其证明常令人耳目一新, 赞叹不已.

例1 求证: (1) $a^2+b^2 \geqslant 2ab$;

(2) $x^2+y^2+z^2 \geqslant xy+yz+xz$.

分析: 要证不等式没有给定各数之间的大小关系, 但却具有对称特征, 此时可以假定各元素的大小关系, 从而合理运用排序不等式来证明.

证明: (1) 不妨设 $a \leqslant b$, 构造两个矩阵:

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix}$ (顺序矩阵), $B=\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ (反序矩阵).

A 的列积和 $=a^2+b^2$, B 的列积和 $=ab+ab$, 根据顺序和 ≥ 反序和, 即 $a^2+b^2 \geqslant 2ab$.

(2) 不妨设 $x \leqslant y \leqslant z$, 构造两个矩阵:

$A=\begin{pmatrix} x & y & z \\ x & y & z \end{pmatrix}$ (顺序矩阵),

$B=\begin{pmatrix} x & y & z \\ y & z & x \end{pmatrix}$ (乱序矩阵).

A 的列积和 $=x^2+y^2+z^2$, B 的列积和 $=xy+yz+xz$, 根据顺序和 ≥ 乱序和, 即有 $x^2+y^2+z^2 \geqslant xy+yz+xz$.

在构造矩阵时, 关键在于合理选择矩阵每一行数字的排列顺序, 特别是乱序矩阵第二行数字的排列. 构造时我们可以合理调整它们的次序以达到目的.

例2 设 $a_1, a_2 \cdots, a_n$ 为正数, 证明: $\dfrac{a_1^2}{a_2}+\dfrac{a_2^2}{a_3}+\cdots+\dfrac{a_{n-1}^2}{a_n}+\dfrac{a_n^2}{a_1} \geqslant a_1+a_2+\cdots+a_n$.

证明: 不妨设 $a_1 \leqslant a_1 \leqslant \cdots \leqslant a_n$, 构造矩阵:

$$A=\begin{pmatrix} a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_{n-1}^2 & a_n^2 \\ \dfrac{1}{a_2} & \dfrac{1}{a_3} & \cdots & \dfrac{1}{a_n} & \dfrac{1}{a_1} \end{pmatrix} \text{(乱序矩阵)},$$

$$B=\begin{pmatrix} a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \dfrac{1}{a_1} & \dfrac{1}{a_2} & \cdots & \dfrac{1}{a_n} \end{pmatrix} \text{(反序矩阵)}.$$

由排序不等式: 乱序和≥反序和, 即命题得证.

例3 已知 a、b、$c \in \mathbf{R}^+$, $a+b+c=1$,

求证: $a^2+b^2+c^2 \geqslant \frac{1}{3}$.

证明: 为了利用已知条件, 需要构造一个列积和含有$a+b+c$的矩阵, 为此我们巧妙设计乱序矩阵, 不妨设$a \leqslant b \leqslant c$, 构造矩阵:

$$A=\begin{pmatrix} a & a & a & b & b & b & c & c & c \\ a & a & a & b & b & b & c & c & c \end{pmatrix}(\text{顺序矩阵}),$$

$$B=\begin{pmatrix} a & a & a & b & b & b & c & c & c \\ a & b & c & a & b & c & a & b & c \end{pmatrix}(\text{乱序矩阵}).$$

A的列积和: $3(a^2+b^2+c^2)$, B的列积和: $(a+b+c)^2$, 根据顺序和$\geqslant$乱序和: $3(a^2+b^2+c^2) \geqslant (a+b+c)^2$, 即$a^2+b^2+c^2 \geqslant \frac{(a+b+c)^2}{3}=\frac{1}{3}$, 命题得证.

在这里我们巧妙地构造了一个乱序矩阵, 使得其列积和为

$a(a+b+c)+b(a+b+c)+c(a+b+c)=(a+b+c)^2$,

达到运用已知条件的目的.

利用类似的方法, 我们可以证明:

$$\frac{(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2}{n} \leqslant x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2.$$

2. 证明不等式时两次或多次运用排序不等式, 将结果相加, 也是常见方法

例4 若a、b、$c>0$, 则$ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a) \geqslant 6abc$.

证明: 不妨设$a \geqslant b \geqslant c>0$, 构造矩阵:

$\begin{pmatrix} ab & ca & bc \\ a & b & c \end{pmatrix}$(乱序), $\begin{pmatrix} ab & ca & bc \\ b & a & c \end{pmatrix}$(乱序), $\begin{pmatrix} ab & ca & bc \\ c & b & a \end{pmatrix}$(反序),

根据乱序和$\geqslant$反序和: $a^2b+c^2a+b^2c \geqslant 3abc$, $ab^2+ca^2+bc^2 \geqslant 3abc$, 两式相加可得$ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a) \geqslant 6abc$.

例5 已知abc均为正数, 求证:

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b} \geqslant \frac{1}{2}(a+b+c).$$

证明: 由不等式的对称性, 不妨设$a \geqslant b \geqslant c>0$, 构造矩阵:

$$\begin{pmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ \frac{1}{b+c} & \frac{1}{c+a} & \frac{1}{a+b} \end{pmatrix}(\text{顺序矩阵}),$$

$$\begin{pmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ \frac{1}{c+a} & \frac{1}{a+b} & \frac{1}{b+c} \end{pmatrix}(\text{乱序矩阵}),$$

$$\begin{pmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ \frac{1}{a+b} & \frac{1}{b+c} & \frac{1}{c+a} \end{pmatrix}(\text{乱序矩阵}).$$

由顺序和$\geqslant$乱序和得到两个不等式:

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b} \geqslant \frac{a^2}{c+a}+\frac{b^2}{a+b}+\frac{c^2}{b+c},$$

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b} \geqslant \frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+a},$$

两式相加得

$$2\left(\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\right) \geqslant \frac{b^2+c^2}{b+c}+\frac{c^2+a^2}{c+a}+\frac{a^2+b^2}{a+b}.$$

注意到$\frac{b^2+c^2}{b+c} \geqslant \frac{1}{2}(b+c)$, $\frac{c^2+a^2}{c+a} \geqslant \frac{1}{2}(c+a)$, $\frac{a^2+b^2}{a+b} \geqslant \frac{1}{2}(a+b)$,

因此

$$2\left(\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\right) \geqslant \frac{1}{2}(b+c)+\frac{1}{2}(c+a)+\frac{1}{2}(a+b)=a+b+c,$$

故

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b} \geqslant \frac{1}{2}(a+b+c).$$

3. 经过适当变形后再运用排序不等式的问题, 常见于一些比较难的习题或竞赛题

例6 设a、b、c为正数, 求证:

$$\frac{c^2-a^2}{a+b}+\frac{a^2-b^2}{b+c}+\frac{b^2-c^2}{c+a} \geqslant 0.$$

证明: 将原不等式变形为$\frac{c^2}{a+b}+\frac{b^2}{a+c}+\frac{a^2}{b+c} \geqslant \frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+a}$.

不妨设$0<a \leqslant b \leqslant c$, 则$a+b \leqslant a+c \leqslant b+c$, 即$\frac{1}{a+b} \geqslant \frac{1}{a+c} \geqslant \frac{1}{b+c}$构造矩阵:

(下转第11-46页)

由2011年安徽中考压轴题引发的几个作图题

215625 江苏省张家港市锦丰镇第三职业中学 屈奇峰

题1 如图1, 正方形$ABCD$的四个顶点分别在四条平行线l_1、l_2、l_3、l_4上, 这四条直线中相邻两条之间的距离依次为h_1、h_2、$h_3(h_1>0,h_2>0,h_3>0)$.

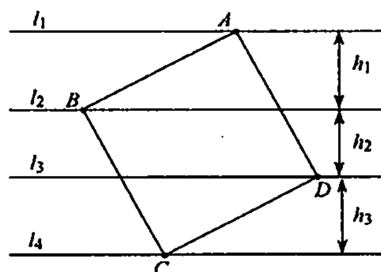


图1

(1) 求证: $h_1=h_3$;

(2) 设正方形$ABCD$的面积为S, 求证: $S=(h_1+h_2)^2+h_1^2$;

(3) 若$\frac{3}{2}h_1+h_2=1$, 当h_1变化时, 说明正方形$ABCD$的面积S随h_1的变化情况.

这道题目是2011年安徽省中考压轴题, 题目本身简单明了, 一改以往压轴题大篇幅的文字阅读量, 消除了大部分学生的恐惧心理. 这道题目考查了全等三角形、平行四边形的判定以及性质、代数运算、一元二次函数的性质等等, 是一道"好题". 本文不准备讨论题目本身的3个问题, 而是关注本题中的图形问题. 题目已经给考生画出正方形, 但我们自然有这样的疑问: 这个图形是否一定能够画出? 如果能画出, 利用圆规和不带刻度的直尺如何作出这样的图形? 所以就有以下的问题.

问题1: 若给出4条平行线, 相邻两条之间的距离依次为h_1、h_2、h_3, 且$h_1=h_3$, 如何用圆规和不带刻度的直尺作出正方形, 使得正方形的四个顶点分别在四条平行线上(注: 为节省篇幅, 下面的作图都只给出作法, 有的作法过程中有多个交点, 也仅仅选择了符合题意的点, 相应的证明也省略了).

$\because S=(h_1+h_2)^2+h_1^2$, 设正方形的边长为$a$, 则$a=\sqrt{(h_1+h_2)^2+h_1^2}$. 由式子的结构, 很容易发现若构造一个直角三角形, 两条直角边分别为h_1+h_2、h_1, 则a为这个直角三角形的斜边长, 所以得到如下的作法, 如图2.

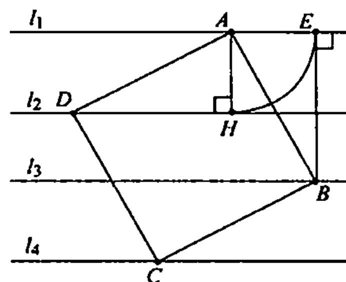


图2

(1) 在直线l_1上任取一点A, 过点A作$AH\perp l_2$, 垂足为H;

(2) 以点A为圆心, AH为半径, 作圆交l_1于两点, 我们取其中一点E;

(3) 过点E作$EB\perp l_1$, 与直线l_3交于点B;

(4) 连结AB, 以点A为圆心, AB为半径, 作圆交l_2于点D, 连结AD;

(5) 以点B为圆心, AB为半径, 作圆交l_4于点C, 连结BC、CD, 则正方形$ABCD$即为所求.

因此, 这样的图形是能够作出的, 作法也不复杂, 仅仅是利用了勾股定理. 类似的问题不仅在中考中出现, 在几年前的高考中也同样出现了——2007年全国高考四川卷理科第11题.

题2 如图3, l_1、l_2、l_3为同一个平面内的三条平行线, l_1与l_2间的距离为1, l_2与l_3间的距离为2, 正三角形ABC的三个顶点分别在三条平行线上, 则$\triangle ABC$的边长是……( )

(A) $2\sqrt{3}$;　　(B) $\frac{4\sqrt{6}}{3}$;

(C) $\frac{3\sqrt{17}}{4}$;　　(D) $\frac{2\sqrt{21}}{3}$.

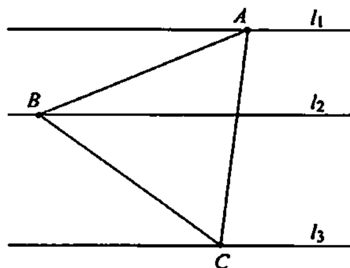


图3

这道题目属于中等偏上的难度，是以平面几何为载体考查解析几何中两点间的距离问题，也是当年颇有新意的试题，一般都是利用向量或者三角变换等方法求解. 文[1]利用勾股定理求出其边长，但计算较为复杂. 我们发现，若利用下面的作法3，仅仅借助勾股定理，初中的同学也可以顺利解决这道高考题.

同样，这道题也牵涉到和问题1类似的问题，这样的正三角形能否作出？若能，如何作？

问题2: 给定同一个平面内三条平行线，作一个正三角形，使得三角形的三个顶点分别在三条平行线上. 下面给出只借助平面几何的知识而得到的4种作法.

作法1: (1) 如图4，在直线l_2上任取一点D，作DA、DC分别与l_2成60°，DA交l_1于点A，DC交l_3于点C;

(2) 连结AC，以点A为圆心，AC为半径作圆，交l_2于点B;

(3) 连结BC、AB，则$\triangle ABC$即为所求.

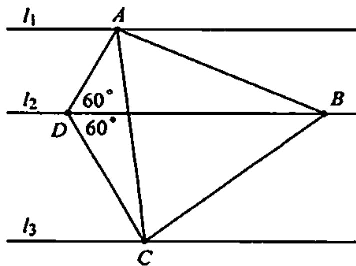


图4

作法2: (1) 如图5，在直线l_2上任取一点A，作$\angle FAD = 60°$，交l_3于点D，连结AD;

(2) 以点D为圆心，DA为半径作圆，交l_2于另一点E，连结DE，并延长DE交l_1于点C;

(3) 连结AC，以A为圆心，AC为半径作圆，交l_3于点B;

(4) 连结AB、BC，则$\triangle ABC$即为所求.

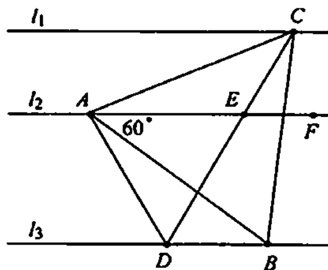


图5

作法3: (1) 如图6，作l_1、l_2、l_3的垂线，分别交l_1、l_2、l_3于点F、A、E;

(2) 作线段FA的中垂线l，则l与l_1、l_2、l_3平行;

(3) 作$\angle AED = 30°$，交l于点D;

(4) 连结AD，并延长AD，交l_1于点B;

(5) 过点D作AB的垂线，交l_3于点C，连结AC、BC，则$\triangle ABC$即为所求.

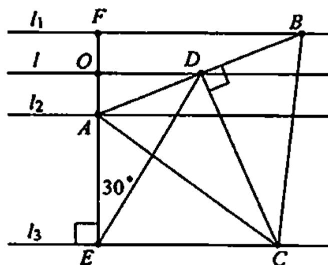


图6

下面我们根据高考题目的数据来计算正三角形的边长.

由作法得$OE = \frac{5}{2}$. 在Rt$\triangle DOE$中，$\angle DEO = 30°$，则$OD^2 = \frac{25}{12}$. 在Rt$\triangle DOA$中，算得$AD^2 = \frac{7}{3}$. $\therefore AB = 2AD = \frac{2\sqrt{21}}{3}$，即正三角形的边长为$\frac{2\sqrt{21}}{3}$.

显然，用最基本的勾股定理也可以解决高考中较为复杂的题目. 高考中的很多问题可以利用初中的知识很好地解决.

作法4: (1) 如图7，在直线l_1上任取一点A，作$AD\perp l_2$，交l_2于点D;

(2) 作 $\angle DAD' = 60^\circ$ 且 $D'A = AD$;

(3) 过点 D' 作 AD' 的垂线 l, 交 l_3 于点 C, 连结 AC;

(4) 以点 A 为圆心, AC 为半径作圆, 交 l_2 于点 B, 连结 BC、AB, 则 $\triangle ABC$ 即为所求.

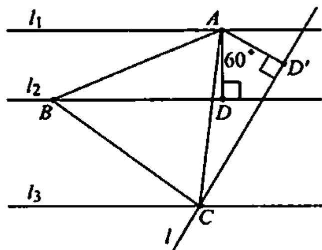


图7

进一步探究问题2的结构, 若把其中的同一个平面内的三条平行线改为三个同心圆, 则有:

问题3: 如图8, 给定三个同心圆 O, 三条半径由小到大依次为 a、b、c, 作一个正三角形, 使得正三角形的三个顶点分别在三个同心圆上.

作法1: (1) 如图8, 在 $\odot(O,b)$ 上任取一点 A, 连结 AO;

(2) 以点 A 为圆心, c 为半径作圆, 交 $\odot(O,a)$ 于点 O';

(3) 以点 O' 为圆心, a 为半径作圆, 交 $\odot(O,a)$ 于点 C, 连结 AC;

(4) 以点 C 为圆心, AC 为半径作圆, 交 $\odot(O,c)$ 于点 B, 连结 BA、BC, 则 $\triangle ABC$ 即为所求.

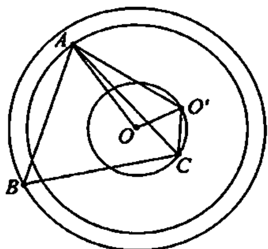


图8

作法2: (1) 如图9, 在 $\odot(O,c)$ 上任取一点 D, 以点 D 为圆心, c 为半径作圆, 交 $\odot(O,c)$ 于点 B, 连结 BD;

(2) 以点 D 为圆心, a 为半径作圆, 交 $\odot(O,b)$ 于点 C, 连结 BC;

(3) 以点 B 为圆心, BC 为半径作圆, 交 $\odot(O,a)$ 于点 A, 连结 AC、BA, 则 $\triangle ABC$ 即为所求.

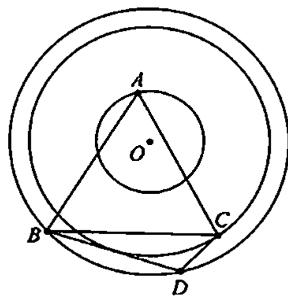


图9

注: 若 $a+b>c$, 则有两解, 若 $a+b=c$, 则有一解, 若 $a+b<c$, 则无解.

结合问题3和问题1, 我们有:

问题4: 如图10, 给定四个同心圆 O, 四条半径由小到大依次为 a、b、c、d, 作一个正方形, 使得正方形的四个顶点分别在四个同心圆上.

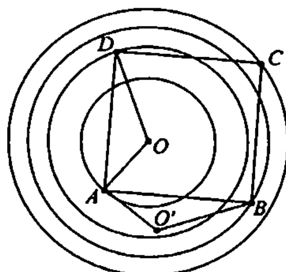


图10

作法3: (1) 如图10, 在 $\odot(O,a)$ 上任取一点 A, 连结 AO;

(2) 过点 A 作一线段 $AO' \perp AO$, 且 $AO' = AO$;

(3) 以点 O' 为圆心, b 为半径作圆, 交 $\odot(O,c)$ 于点 B, 连结 AB;

(4) 以点 A 为圆心, AB 为半径作圆, 交 $\odot(O,b)$ 于点 D, 连结 AD;

(5) 以点 B 为圆心, AB 为半径作圆, 交 $\odot(O,d)$ 于点 C, 连结 BC、DC, 则正方形 $ABCD$ 即为所求.

注: 只有当 $a^2+d^2=b^2+c^2$ 时, 相应的正方形才可以作出.

上面讨论了一道中考压轴题中的图形作法, 一道高考题中的图形作法, 以及由这2个问题引申的2个相关问题. 其实, 若我们思路更宽广一点, 我们还可以得到与之相关的很多问题, 我们可以把4条平行线改成5条, 6条乃

(下转封底)

一类导数高考压轴题的通解

830002 新疆生产建设兵团第二中学 张国治

笔者发现一类运用导数求解关于含参不等式恒成立的高考压轴题在很多省、市的高考试卷中出现，学生普遍感觉此类问题较难处理，而有些关于此类问题解法的文章又有瑕疵．为此，笔者取长补短，给出此类问题简洁的通解，供读者参考．

例1 (2010年全国高考新课标卷理科第21题) 设函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-1-x-ax^2$.

(I) 若 $a=0$, 求 $f(x)$ 的单调区间;

(II) 若当 $x\geqslant 0$ 时 $f(x)\geqslant 0$, 求 a 的取值范围.

高考命题组提供的标准解答:

(I) 当 $a=0$ 时, $f(x)=\mathrm{e}^x-1-x$, $f'(x)=\mathrm{e}^x-1$.

当 $x\in(-\infty,0)$ 时, $f'(x)<0$; 当 $x\in(0,+\infty)$ 时, $f'(x)>0$. 故 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减, 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

(II) $f'(x)=\mathrm{e}^x-1-2ax$.

由 (I) 知 $\mathrm{e}^x\geqslant 1+x$, 当且仅当 $x=0$ 时等号成立. 故

$$f'(x)\geqslant x-2ax=(1-2a)x,$$

从而当 $1-2a\geqslant 0$, 即 $a\leqslant\frac{1}{2}$ 时, $f'(x)\geqslant 0(x\geqslant 0)$, 而 $f(0)=0$, 于是当 $x\geqslant 0$ 时, $f(x)\geqslant 0$.

由 $\mathrm{e}^x>1+x$ $(x\neq 0)$ 可得 $\mathrm{e}^{-x}>1-x$ $(x\neq 0)$. 从而当 $a>\frac{1}{2}$ 时,

$$f'(x)<\mathrm{e}^x-1+2a(\mathrm{e}^{-x}-1)=\mathrm{e}^{-x}(\mathrm{e}^x-1)(\mathrm{e}^x-2a),$$

故当 $x\in(0,\ln 2a)$ 时, $f'(x)<0$, 而 $f(0)=0$, 于是当 $x\in(0,\ln 2a)$ 时, $f(x)<0$.

综上 a 的取值范围为 $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$.

分析: 上述解法中 (II) 的关键是利用 (I) 获得的不等式 $\mathrm{e}^x\geqslant 1+x$, 解法巧妙, 但可操作性不高, 解法难推广. 事实上, 有如下更符合学生逻辑思维的一般解法.

简解: (I) 同高考标准解答, 略.

(II) 因为 $f'(x)=\mathrm{e}^x-1-2ax$ (此时式子中有 ax, 不好讨论 a, 故可考虑求二阶导数, 并注意到 $f'(0)=0$), 故 $f''(x)=\mathrm{e}^x-2a\,(x\geqslant 0)$, 易知 $f''(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上单调递增, 故 $f''(x)=\mathrm{e}^x-2a\geqslant 1-2a$ (由于 $1-2a$ 值的正负影响 $f'(x)$ 的单调性, 故需讨论).

(i) 当 $1-2a\geqslant 0$, 即 $a\leqslant\frac{1}{2}$ 时, 对 $x\in[0,+\infty)$, 有 $f''(x)=\mathrm{e}^x-2a\geqslant 1-2a\geqslant 0$, 故 $f'(x)=\mathrm{e}^x-1-2ax$ 在 $[0,+\infty)$ 单调递增, 故 $f'(x)\geqslant f'(0)=0$, $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增, 此时恒有 $f(x)\geqslant f(0)=0$ 成立, 故 $a\leqslant\frac{1}{2}$ 符合题意.

(ii) 当 $1-2a<0$, 即 $a>\frac{1}{2}$ 时, 令 $f''(x)=\mathrm{e}^x-2a<0$ 得 $x<\ln 2a$, 故在区间 $(0,\ln 2a)$ 上 $f''(x)<0$, 故 $f'(x)=\mathrm{e}^x-1-2ax$ 在 $(0,\ln 2a)$ 上单调递减, 故 $f'(x)<f'(0)=0$, $f(x)$ 在 $(0,\ln 2a)$ 上单调递减, 此时 $f(x)<f(0)=0$, 这与题设矛盾, 故 $a>\frac{1}{2}$ 不符合题意.

综上, a 的取值范围为 $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$.

点评: 此题通过对 $f(x)$ 不断求导直到能便捷讨论 a 的取值为止, 当然解题过程中 $f(0)=0, f'(0)=0$ 和 $f''(x)$ 值的正负很关键, 相比较高考标准解答, 笔者自认为此法更适合学生, 更具有普遍性.

例2 (2010年全国高考湖北卷理科第21题) 已知函数 $f(x)=ax+\frac{b}{x}+c$ $(a>0)$ 的图像在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y=x-1$.

(I) 用 a 表示出 b、c;

(II) 若 $f(x)\geqslant\ln x$ 在 $[1,+\infty)$ 上恒成立, 求 a 的取值范围;

(III) 证明: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}>\ln(n+1)+\frac{n}{2(n+1)}\ (n\geqslant 1)$.

(Ⅰ)、(III) 解法略, 高考命题组提供 (Ⅱ) 的标准解答:

由 (Ⅰ) 知, $f(x)=ax+\frac{a-1}{x}+1-2a$, 令 $g(x)=f(x)-\ln x=ax+\frac{a-1}{x}+1-2a-\ln x\ (x\in[1,+\infty))$, 则 $g(1)=0, g'(x)=a-\frac{a-1}{x^2}-\frac{1}{x}=\frac{a(x-1)\left(x-\frac{1-a}{a}\right)}{x^2}$.

(i) 当 $0<a<\frac{1}{2}$ 时, $\frac{1-a}{a}>1$. 若 $1<x<\frac{1-a}{a}$, 则 $g'(x)<0$, 即 $g(x)$ 是减函数, 所以 $g(x)<g(1)=0$, 所以 $f(x)<\ln x$. 故 $f(x)\geqslant\ln x$ 在 $[1,+\infty)$ 上恒不成立.

(ii) 当 $a\geqslant\frac{1}{2}$ 时, $\frac{1-a}{a}\leqslant 1$. 当 $x\geqslant 1$, $g'(x)\geqslant 0$, $g(x)\geqslant g(1)=0$, 所以 $f(x)\geqslant\ln x$. 故 $f(x)\geqslant\ln x$ 在 $[1,+\infty)$ 上恒成立.

综上, a 的取值范围为 $\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$.

分析: 同例1的分析思路, 有如下更符合学生逻辑思维的一般解法.

简解: 由 (I) 知, $f(x)=ax+\frac{a-1}{x}+1-2a$, 令 $g(x)=f(x)-\ln x=ax+\frac{a-1}{x}+1-2a-\ln x\ \ (x\in[1,+\infty))$, $g(1)=0$, $g'(x)=a-\frac{a-1}{x^2}-\frac{1}{x}=\frac{ax^2-x-(a-1)}{x^2}$, 则 $g'(1)=0$, $h(x)=ax^2-x-(a-1)(x\in[1,+\infty))$, 则 $h(1)=0$, $h'(x)=2ax-1$. $\because a>0$, $\therefore h'(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增, $\therefore h'(x)=2ax-1\geqslant 2a-1$.

(i) 当 $2a-1\geqslant 0$, 即 $a\geqslant\frac{1}{2}$ 时, 对 $x\in[1,+\infty)$, 有 $h'(x)=2ax-1\geqslant 2a-1\geqslant 0$, 故 $h(x)=ax^2-x-(a-1)$ 在 $[1,+\infty)$ 单调递增, 故 $h(x)\geqslant h(1)=0$, 即 $g'(x)\geqslant 0$, $\therefore g(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增, 此时恒有 $g(x)\geqslant g(1)=0$ 成立, 即 $f(x)\geqslant\ln x$, 故 $a\geqslant\frac{1}{2}$ 符合题意.

(ii) 当 $2a-1<0$, 即 $a<\frac{1}{2}$ 时, 令 $h'(x)=2ax-1<0$ 得 $x<\frac{1}{2a}$, 故在区间 $\left(1,\frac{1}{2a}\right)$ 上 $h'(x)<0$, 故 $h(x)=ax^2-x-(a-1)$ 在 $\left(1,\frac{1}{2a}\right)$ 单调递减, 故 $h(x)<h(1)=0$, 即在区间 $\left(1,\frac{1}{2a}\right)$ 上 $g'(x)<0$, $\therefore g(x)$ 在 $\left(1,\frac{1}{2a}\right)$ 上单调递减, 此时 $g(x)<g(1)=0$, 即 $f(x)<\ln x$, 这与题设矛盾, 故 $a<\frac{1}{2}$ 不符合题意.

综上, a 的取值范围为 $\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$.

点评: 此类问题常常需要构造一个新函数来解决.

例3 (2010年全国高考全国卷II理科第22题) 设函数 $f(x)=1-e^{-x}$.

(I) 证明: 当 $x>-1$ 时, $f(x)\geqslant\frac{x}{x+1}$;

(Ⅱ) 设当 $x\geqslant 0$ 时, $f(x)\leqslant\frac{x}{ax+1}$, 求 a 的取值范围.

高考命题组提供的标准解答:

(I) 当 $x>-1$ 时, $f(x)\geqslant\frac{x}{x+1}$ 当且仅当 $e^x\geqslant 1+x$, 令 $g(x)=e^x-x-1$, 则 $g'(x)=e^x-1$. 当 $x\geqslant 0$ 时, $g'(x)\geqslant 0$, 则 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增; 当 $x\leqslant 0$ 时, $g'(x)\leqslant 0$, 则 $g(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 上单调递减, 于是 $g(x)$ 在 $x=0$ 处达到最小值, 即 $g(x)\geqslant g(0)\,(x\in\mathbf{R})$, 即 $e^x\geqslant 1+x$, 所以当 $x>-1$ 时, $f(x)\geqslant\frac{x}{x+1}$.

(Ⅱ) 由题设 $x\geqslant 0$, 此时 $f(x)\geqslant 0$. 当 $a<0$ 时, 若 $x>-\frac{1}{a}$, 则 $\frac{x}{ax+1}<0$, $f(x)\leqslant\frac{x}{ax+1}$ 不成立; 当 $a\geqslant 0$ 时, 令 $h(x)=axf(x)+f(x)-x$, 则 $f(x)\leqslant\frac{x}{ax+1}$ 当且仅当 $h(x)\leqslant 0$. $h'(x)=af(x)+axf'(x)+f'(x)-1=af(x)-axf(x)+ax-f(x)$.

(i) 当 $0\leqslant a\leqslant\frac{1}{2}$ 时, 由 (Ⅰ) 知 $x\leqslant(x+1)f(x)$, $h'(x)=af(x)-axf(x)+ax-f(x)\leqslant(2a-1)f(x)\leqslant 0$, $h(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上是减函数, $h(x)\leqslant h(0)=0$, 即 $f(x)\leqslant\frac{x}{ax+1}$.

(ii) 当 $a>\frac{1}{2}$ 时, 由 (I) 知 $x\geqslant f(x)$. $h'(x)=af(x)-axf(x)+ax-f(x)\geqslant af(x)-axf(x)+af(x)-f(x)=(2a-1-ax)f(x)$. 当 $0<x<$

$\frac{2a-1}{a}$时, $h'(x)>0$, 所以$h(x)>h(0)=0$, 即$f(x)>\frac{x}{ax+1}$.

综上, a的取值范围为$\left[0,\frac{1}{2}\right]$.

分析: 此题(II)的标准解答技巧性很强, 略显突兀, 学生普遍反映能看懂, 但想不到. 能否有更好、更自然的解答呢? 注意到此类问题基本一样, 同例2有如下简解.

简解: (I)略.

(II)由题设$x\geqslant 0$, 此时$f(x)\geqslant 0$.

当$a<0$时, 若$x>-\frac{1}{a}$, 则$\frac{x}{ax+1}<0$, $f(x)\leqslant\frac{x}{ax+1}$不成立;

当$a\geqslant 0$时, 令$F(x)=f(x)-\frac{x}{ax+1}=1-\mathrm{e}^{-x}-\frac{x}{ax+1}$, 则$F(0)=0$. $F'(x)=\frac{1}{\mathrm{e}^x}-\frac{1}{(ax+1)^2}=\frac{(ax+1)^2-\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x(ax+1)^2}$, $F'(0)=0$. 当$a\geqslant 0$时, $ax+1>0$. 令$h(x)=ax+1-\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$ $(x\in[0,+\infty))$, 则$h(0)=0, h'(x)=a-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$. 易知$h'(x)$在区间$[0,+\infty)$上单调递减, 故$h'(x)=a-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\leqslant a-\frac{1}{2}$.

(i)当$a-\frac{1}{2}\leqslant 0$, 即$0\leqslant a\leqslant\frac{1}{2}$, 对$x\in[0,+\infty)$, 有$h'(x)=a-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\leqslant a-\frac{1}{2}\leqslant 0$, 故$h(x)=ax+1-\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$在$[0,+\infty)$上单调递减, 故$h(x)\leqslant h(0)=0$, 即$0<ax+1\leqslant\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$. $\therefore(ax+1)^2\leqslant\mathrm{e}^x$, 即$F'(x)\leqslant 0$, $\therefore F(x)$在$[0,+\infty)$上单调递减, 此时恒有$F(x)\leqslant F(0)=0$成立, 即$f(x)\leqslant\frac{x}{ax+1}$成立, 故$0\leqslant a\leqslant\frac{1}{2}$符合题意.

(ii)当$a-\frac{1}{2}>0$, 即$a>\frac{1}{2}$时, 令$h'(x)=a-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}>0$得$x<2\ln 2a$, 故在区间$(0,2\ln 2a)$上$h'(x)>0$, 故$h(x)=ax+1-\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$在$(0,2\ln 2a)$上单调递增, 故$h(x)>h(0)=0$, 即$ax+1>\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$, $\therefore(ax+1)^2>\mathrm{e}^x$, 即$F'(x)>0$, $\therefore F(x)$在$(0,2\ln 2a)$上单调递增, 此时有$F(x)>F(0)=0$成立, 此时$f(x)>\frac{x}{ax+1}$, 这与题设矛盾, 故$a>\frac{1}{2}$不符合题意.

综上, a的取值范围为$\left[0,\frac{1}{2}\right]$.

点评: 此类问题是有统一通法来解决的, 关键是构造新的函数或将原函数经过若干次求导到足以判断单调性而得到参数的讨论标准, 对参数取值的另一面只需找出一个与题设矛盾的区间即可, 当然解题过程中的一些细节处理应引起重视. 从上述解法可知此类问题解答与题设第(I)小题无任何关系, 即将题目设置为仅有第(II)小题, 此类问题也能轻松获解.当然读者也可以尝试从曲线切线或从其他角度思考此类问题是如何命制的, 限于篇幅不再赘述.

参考文献

[1] 李真福. 三道年份不同的高考题的统一解法[J]. 数学通讯, 2008 (18): 16-17.

[2] 李祥春, 蔡刚, 张绍治. 一类高考题的高等数学背景[J]. 数学通讯, 2009 (4): 16.

[3] 刘金. 一类高考题的统一解法[J]. 数学通讯, 2010 (11-12): 58-60.

(上接第11-10页)

参考文献

[1] 丁元元, 章伟聪. "1倍租金"怎么理解房东房客打起"数学官司" [N]. 青年报, 2011年05月27日.

[2] 方均斌. 数学教学个案研究[M]. 成都: 四川大学出版社, 2006, 11.

[3] 人教版普通高中课程标准实验教科书(A版. 数学必修①) [M]. 北京: 人民教育出版社, 2004, 5.

[4] 陈重穆, 宋乃庆. 淡化形式注重实质——兼论《九年义务教育全日制初级中学数学教学大纲》[J]. 数学教育学报, 1993(2): 4-9.

[5] 章建跃. 数学概念的理解与教学[J]. 中学数学教学参考, 2010, 11(上旬): 2-7.

[6] 陈为华. 二百余年的概念科学性之争——函数概念的演进[J]. 科技信息(科学教研), 2007(15): 296.

[7] 浙教版义务教育课程标准实验教科书(九年级上册) [M]. 杭州: 浙江教育出版社, 2004, 5.

对2011年高考湖南卷理科第16题的研究

100071　北京市丰台二中　甘志国

高考题(2011年全国高考湖南卷理科第16题)

对于$n\in\mathbf{N}^*$, 将n表示为$n=a_0\times 2^k+a_1\times 2^{k-1}+a_2\times 2^{k-2}+\cdots+a_{k-1}\times 2^1+a_k\times 2^0$, 当$i=0$时, $a_i=1$; 当$1\leqslant i\leqslant k$时, a_i为0或1. 记$I(n)$为上述表示中a_i为0的个数(例如: $1=1\times 2^0, 4=1\times 2^2+0\times 2^1+0\times 2^0$, 故$I(1)=0$, $I(4)=2$), 则(1) $I(12)=$______; (2) $\sum\limits_{n=1}^{127}2^{I(n)}=$______.

解: (1) 因为$12=1\times 2^3+1\times 2^2+0\times 2^1+0\times 2^0$, 所以$I(12)=2$.

(2) 记$n=a_0\times 2^k+a_1\times 2^{k-1}+a_2\times 2^{k-2}+\cdots+a_{k-1}\times 2^1+a_k\times 2^0=(a_0,a_1,\cdots,a_k)$, 例如127=(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1).

对于任意的$n\in\{1,2,\cdots,127\}$, 设$n=(a_0,a_1,\cdots,a_k)$ (其中$a_0=1$, $k=0,1,2,\cdots,6$), 因此这种表示法中:

有0个0的数有$7=C_7^1$个(1, 2, 3,$\cdots$, 7位数各1个), 即$I(n)=0$的n有7个;

有1个0的数有$0+1+2+\cdots+6=C_7^2$个(1, 2, 3,$\cdots$, 7位数分别有0, 1, 2,$\cdots$, 6个), 即$I(n)=1$的n有C_7^2个;

有2个0的数有$0+C_2^2+C_3^2+\cdots+C_6^2=C_7^3$个(2, 3, 4,$\cdots$, 7位数分别有$0,C_2^2,C_3^2,\cdots,C_6^2$个), 即$I(n)=2$的$n$有$C_7^3$个;

有3个0的数有$0+C_3^3+C_4^3+C_5^3+C_6^3=C_7^4$个(3, 4, 5, 6, 7位数分别有$0,C_3^3,C_4^3,C_5^3,C_6^3$个), 即$I(n)=3$的$n$有$C_7^4$个;

有4个0的数有$0+C_4^4+C_5^4+C_6^4=C_7^5$个(4, 5, 6, 7位数分别有$0,C_4^4,C_5^4,C_6^4$个), 即$I(n)=4$的$n$有$C_7^5$个;

有5个0的数有$0+C_5^5+C_6^5=C_7^6$个(5, 6, 7位数分别有$0,C_5^5,C_6^5$个), 即$I(n)=5$的n有C_7^6个;

有6个0的数有$C_6^6=C_7^7$个, 即$I(n)=6$的n有C_7^7个.

所以$\sum\limits_{n=1}^{127}2^{I(n)}=C_7^1\times 2^0+C_7^2\times 2+C_7^3\times 2^2+C_7^4\times 2^3+C_7^5\times 2^4+C_7^6\times 2^5+C_7^7\times 2^6=\dfrac{(1+2)^7-1}{2}=1093.$

这是一道以"二进制"(可见普通高中课程标准实验教科书《数学3·必修·A版》(人民教育出版社2007年第3版)第40-44页)为背景的题目: 任意正整数n均可表示成$n=a_0\times 2^k+a_1\times 2^{k-1}+\cdots+a_k\times 2^0$ (其中$k\in\mathbf{N}$, $a_1,\cdots,a_k\in\{0,1\},a_0=1$), 也可记作$n=\overline{a_0a_1\cdots a_{k(2)}}$, $a_0,a_1,\cdots,a_k$都叫做n的二进制表示数码. 下面对此题作些研究.

变式1　当正整数n取遍1, 2, 3,$\cdots$, 127 (注意$127=1111111_{(2)}$)时, n的二进制表示数码中含1个1, 2个1, 3个1, $\cdots$, 7个1的正整数n分别有多少个?

解: 由正整数n的二进制表示可知, 对于$n\in\{1,2,3,\cdots,127\}$, 可把n唯一表示成七位二进制数码$n=\overline{b_6\cdots b_1b_{0(2)}}$, 即$n=b_6\times 2^6+\cdots+b_1\times 2^1+b_0\times 2^0$. 二进制表示数码与二进制表示的不同在于前者开头可以是连续的若干个0, 而后者的首位数码是1.

所以, n的二进制表示数码中1的个数与n的二进制表示中1的个数一样. 由此得: 当正整数n取遍1, 2, 3,$\cdots$, 127时, n的二进制表示数码中含1个1, 2个1, 3个1, $\cdots$, 7个1的正整数n分别有$C_7^1,C_7^2,C_7^3,\cdots,C_7^7$个.

变式2　当正整数n取遍1, 2, 3,$\cdots$, 127时, n的二进制表示数码中含0个0, 1个0, 2个0, $\cdots$, 6个0的正整数n分别有多少个?

解: 在正整数n的二进制表示中首位数码一定是1, 后面的数码是0或1, 所以可让

$\overline{1xy\cdots z_{(2)}}$与$\overline{1(1-x)(1-y)\cdots(1-z)_{(2)}}$一一对应，前者数码中1的个数比后者数码中0的个数多1，所以"当正整数n取遍1，2，3,$\cdots$，127时，n的二进制表示的数码中含1个1，2个1，3个1，$\cdots$，7个1的正整数n的个数"分别就是"当正整数n取遍1，2，3,$\cdots$，127时，n的二进制表示数码中含0个0，1个0，2个0，$\cdots$，6个0的正整数n的个数"，即分别有$C_7^1,C_7^2,C_7^3,\cdots,C_7^7$个.

变式3　当正整数n取遍1，2，3,$\cdots$，242（注意$242=22222_{(3)}$）时，n的三进制表示数码中含0个1，1个1，2个1，3个1，4个1，5个1的正整数n分别有多少个？

解：由正整数n的三进制表示知，对于$n\in\{1,2,3,\cdots,242\}$，可把n唯一地表示成五位三进制数码$n=\overline{b_4\cdots b_1b_{0(3)}}$，即$n=b_4\times 2^4+\cdots+b_1\times 2^1+b_0\times 2^0$. 三进制数码表示与三进制表示的不同在于前者开头可以是连续的若干个0，而后者的首位数码是1或2.

所以，n的三进制表示数码中1的个数与n的三进制表示中1的个数一样. 由此得：当正整数n取遍1，2，3,$\cdots$，242时，n的3进制表示数码中含0个1，1个1，2个1，3个1，$\cdots$，7个1的正整数n分别有$2^5-1,C_5^1\cdot 2^4,C_5^2\cdot 2^3,C_5^3\cdot 2^2,C_5^4\cdot 2,C_5^5$个.

变式4　当正整数n取遍1，2，3,$\cdots$，242时，n的三进制表示数码中含0个2，1个2，2个2，3个2，4个2，5个2的正整数n分别有多少个？

解：分别有$2^5-1,C_5^1\cdot 2^4,C_5^2\cdot 2^3,C_5^3\cdot 2^2,C_5^4\cdot 2,C_5^5$个.

变式5　当正整数n取遍1，2，3,$\cdots$，h（其中$h=\underbrace{\overline{22\cdots 2_{(3)}}}_{k个2}$）时，$n$的三进制表示数码中含0个0，1个0，2个0，$\cdots$，$k-1$个0的正整数$n$分别有多少个？

解：含有i个0的正整数n有$C_i^i\cdot 2+C_{i+1}^i\cdot 2^2+C_{i+2}^i\cdot 2^3+\cdots+C_{k-1}^i\cdot 2^{k-i}(i=0,1,\cdots,k-1)$个.

可用错位相减法求得：当$i=0,1,2,3$时，答案分别为

$2^{k+1}-2,(k-2)2^k-2,(C_{k-2}^2+1)2^{k-1}-2,(C_{k-2}^3+k-4)2^{k-2}+2.$

（上接第11-38页）

$$\begin{pmatrix} c^2 & b^2 & a^2 \\ \dfrac{1}{a+b} & \dfrac{1}{a+c} & \dfrac{1}{b+c} \end{pmatrix}（同序矩阵），$$

$$\begin{pmatrix} c^2 & b^2 & a^2 \\ \dfrac{1}{c+a} & \dfrac{1}{b+c} & \dfrac{1}{a+b} \end{pmatrix}（乱序矩阵）.$$

由同序和≥乱序和得$\dfrac{c^2}{a+b}+\dfrac{b^2}{a+c}+\dfrac{a^2}{b+c}\geqslant\dfrac{a^2}{a+b}+\dfrac{b^2}{b+c}+\dfrac{c^2}{c+a}$，即原不等式得证.

例7　（第六届国际数学竞赛题）在$\triangle ABC$中，求证：$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)\leqslant 3abc$.

证明：由于三角形三边存在"两边之和大于第三边"的要求，我们不能将这三边当成任意正数对待，为了将几何问题代数化，设三角形内切圆的三个切点将三边分为：$a=y+z$，$b=z+x,c=x+y,x、y、x>0$，原式可化为$x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)\geqslant 6xyz$.

设$x\leqslant y\leqslant z$，则$yz\geqslant xz\geqslant xy$，构造矩阵：
$\begin{pmatrix} y & z & x \\ yz & xz & xy \end{pmatrix}$和$\begin{pmatrix} z & x & y \\ yz & xz & xy \end{pmatrix}$（乱序矩阵），$\begin{pmatrix} x & y & z \\ yz & xz & xy \end{pmatrix}$（反序矩阵）.

反序和最小，则有$y^2z+z^2x+x^2y\geqslant 3xyz$和$z^2y+x^2z+y^2x\geqslant 3xyz$，两式相加得

$$x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)\geqslant 6xyz.$$

注：这里将几何问题代数化的思想是非常重要的一种转换，运用类似的方法可以证明：

（第二十四届国际数学竞赛题）在$\triangle ABC$中，求证：$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\geqslant 0$.

排序不等式原理简单却变化无穷，是数学美的又一体现.

趣议2012年江苏省高考数学试卷压轴题

226500 江苏如皋市教师进修学校 徐 道

2012年全国高考江苏卷压轴题(以下称题1)是:

设集合 $P_n=\{1,2,\cdots,n\}$, $n\in\mathbf{N}^*$. 设 $f(n)$ 为同时满足下列条件的集合 A 的个数:

① $A\subseteq P_n$;

② 若 $x\in A$, 则 $2x\notin A$;

③ 若 $x\in\complement_{P_n}A$, 则 $2x\notin\complement_{P_n}A$.

(1) 求 $f(4)$;

(2) 求 $f(n)$ 的解析式(用 n 表示).

无容置疑, 这是一道不落俗套、题型新颖、很好体现创新、探索精神、有利于高校选拔人才的好题. 这道题对所有考生来说, 既是"新面孔", 又"似曾相识", 体现了高考面前人人平等的和谐理念.

《扬子晚报》2012年6月11日公布的"标准答案"是:

(1) 当 $n=4$ 时, 符合条件的集合 A 为: $\{2\}$, $\{1,4\}$, $\{2,3\}$, $\{1,3,4\}$, 故 $f(4)=4$.

(2) 任取偶数 $x\in P_n$, 将 x 除以2, 若商仍为偶数, 再除以2, $\cdots$, 经过 k 次以后, 商必为奇数, 此时记商为 m. 于是 $x=m\cdot 2^k$, 其中 m 为奇数, $k\in\mathbf{N}^*$.

由条件知, 若 $m\in A$, 则 $x\in A\iff k$ 为偶数; 若 $m\notin A$, 则 $x\in A\iff k$ 为奇数.

于是 x 是否属于 A 由 m 是否属于 A 确定. 设 Q_n 是 P_n 中所有奇数的集合, 因此 $f(n)$ 等于 Q_n 的子集的个数. 当 n 为偶数(或为奇数)时, P_n 中奇数的个数是 $\frac{n}{2}$ $\left(\text{或}\frac{n+1}{2}\right)$, 所以,

$$f(n)=\begin{cases}2^{\frac{n}{2}}, & n\text{为偶数};\\ 2^{\frac{n+1}{2}}, & n\text{为奇数}.\end{cases}$$

笔者认为这个"标准解答"似乎体现了数学"冷酷、无情"的一面, 未能体现数学"美丽、好玩"的一面. 本文提供一种不同于"标准解答"的另一解法.

首先我们对题1中符合条件的子集的性质作一简单探讨.

假设 P_n 有 m 个子集 A_1, A_2, $\cdots$, A_m 符合条件, 这 m 个子集构成集合 S, 即 $S=\{A_1, A_2,\cdots,A_m\}$. 由条件②、③知, 若 $A_1\in S$, 则 $\complement_{P_n}A_1\in S$, 即 A_1 与其关于 P_n 的补集均属于 S, 因而 m 必为偶数, 则 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 中有 $\frac{m}{2}$ 对集合互补. 因而1, 2, $\cdots$, n 中任一元素在 S 中一个集合 A_i 中出现, 那么必然在 S 中的另一个集合 $\complement_{P_n}A_i$ 中不出现, 反之也成立. 所以, 1, 2, $\cdots$, n 中任一元素仅在 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 的半数集合中出现.

设对 P_n 来说符合条件的所有子集为 A_1, A_2, $\cdots$, A_m, 如何寻求 P_{n+1} 中符合条件的所有子集呢? 这些子集可分为两类:

第一类不含元素 $n+1$;

第二类含元素 $n+1$;

不含元素 $n+1$ 的子集只能在 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 中, 因为其他子集显然不满足条件②、③;

含元素 $n+1$ 的子集必存在于 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 的每个集合增加一个元素 $n+1$ 而获得的 m 个子集中.

综上所述, 我们获得

结论1 若 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 是 P_n 的所有符合条件的子集, 则:

(1) m 为偶数;

(2) $\frac{m}{2}$ 对集合互补;

(3) 1, 2, $\cdots$, n 中任一元素仅在其中一半的集合中出现.

注: 第(2)点说明数学中的集合也要"成双作对"; 第(3)点表明元素1, 2, $\cdots$, n 之间的地位绝对平等.

结论2 若$A_1,A_2,\cdots,A_m$是P_n的所有符合条件的子集, 则P_{n+1}的所有符合条件的子集只能存在于下列两类集合中:

(1) $A_1,A_2,\cdots,A_m$;

(2) $A_1,A_2,\cdots,A_m$的每个集合均添加元素$n+1$而得到的m个集合.

注: 此结论给出了寻找P_n的所有符合条件的子集的一种方法.

欲求某一个集合带有限制条件子集的个数, 而限制条件对子集及其补集相同, 上述两个结论均适用.

现在让我们来解题1吧.

$n=1$, $P_1=\{1\}$. 此时P_n有两个子集: $\varnothing$, $\{1\}$, 都符合条件, 故$f(1)=2$.

$n=2$, $P_2=\{1,2\}$. 根据结论2, P_2的所有符合条件的子集可能在以下4个子集中: $\varnothing$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{1,2\}$. 而$\varnothing$及$\{1,2\}$不符合条件, 符合条件的子集是: $\{1\}$, $\{2\}$. 故$f(2)=2$.

$n=3$, $P_3=\{1,2,3\}$, P_3的所有符合条件的子集可能是, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{1,3\}$, $\{2,3\}$. 这4个子集均符合条件, 所以$f(3)=4$.

$n=4$, $P_4=\{1,2,3,4\}$, P_4的所有符合条件的可能在以下8个子集中: $\{1\}$, $\{2\}$, $\{1,3\}$, $\{2,3\}$, $\{1,4\}$, $\{2,4\}$, $\{1,3,4\}$, $\{2,3,4\}$.

但前4个子集中有2个不满足条件③, 它们是: $\{1\}$, $\{1,3\}$; 后4个子集中有2个不满足条件②, 它们是: $\{2,4\}$, $\{2,3,4\}$, 这4个子集恰巧也是2对互补集合, 要去掉. 因而符合条件的子集是: $\{2\}$, $\{2,3\}$, $\{1,4\}$, $\{1,3,4\}$. 故$f(4)=4$.

通过对$n=3$, 4时符合条件的子集构造, 我们发现一个有趣现象: 当n为偶数构造$n+1$时, 符合条件的子集的个数正好是n时的子集数的2倍; 当n为奇数构造$n+1$时, 符合条件的子集数恰巧与n时的子集数相等. 故可猜测:

$$f(n)=\begin{cases}2^{\frac{n}{2}}, & n\text{为偶数};\\ 2^{\frac{n+1}{2}}, & n\text{为奇数}.\end{cases}$$

假设$n=2m$时, 符合条件的子集数为2^m, 这些子集设为$A_1,A_2,\cdots,A_{2^m}$, 那么当$n=2m+1$, 根据结论2, P_{2m+1}的所有符合条件的子集只能存在于下面两类集合中:

(1) $A_1,A_2,\cdots,A_{2^m}$;

(2) $A_1,A_2,\cdots,A_{2^m}$的每个集合均添加元素$2m+1$而得到的2^m个集合.

这2^{m+1}个子集均符合条件, 故$f(2m+1)=2^{m+1}$.

假设$n=2m+1$时符合条件的子集数为2^{m+1}, 这些子集设为$A_1,A_2,\cdots,A_{2^{m+1}}$, 那么当$n=2m+2$时, 根据结论2, P_{2m+2}的所有符合条件的子集只能存在于下面两类集合中:

(1) $A_1,A_2,\cdots,A_{2^{m+1}}$;

(2) $A_1,A_2,\cdots,A_{2^{m+1}}$的每个集合均添加元素$2m+2$而得到的$2^{m+1}$个集合.

第(1)类集合中有2^m个集合既不含元素$2m+2$, 也不含元素$m+1$, 不满足条件③; 第(2)类集合中有2^m个集合既含元素$2m+2$, 也含元素$m+1$, 不满足条件②, 故共有2^{m+1}个集合不符合条件, 要去掉, 故$f(2m+2)=2^{m+1}$.

至此, 已证$n\in\mathbf{N}^*$时均有

$$f(n)=\begin{cases}2^{\frac{n}{2}}, & n\text{为偶数};\\ 2^{\frac{n+1}{2}}, & n\text{为奇数}.\end{cases}$$

接着我们讨论题1的一般情形.

题2 设集合$P_n=\{1,2,\cdots,n\}$, $n\in\mathbf{N}^*$. 设$f(n)$为同时满足下列条件集合A的个数:

①$A\subseteq P_n$;

②若$x\in A$, 则$px\notin A$, $p\geqslant 2$, $p\in\mathbf{N}$;

③若$x\in \complement_{P_n}A$, 则$px\notin \complement_{P_n}A$. 求$f(n)$.

仿题1可得:

若$n=pm+r$, $m\in\mathbf{N}$, $r=0$, 1, 2, $\cdots$, $p-1$, 则$f(n)=2^{(p-1)m+r}$.

显然, 题2是题1的推广.

《数学教育学报》2013年征订启事

《数学教育学报》是中国联合国教科文组织指导刊物，王梓坤院士任主编，全国80多家董事单位集资办刊，天津师大、中国教育学会为主办单位，北京师大、华东师大、东北师大、贵州师大、南京师大、西南大学、扬州大学、浙江师大、首都师大、湖南师大、华南师大、广州大学、江苏师大等13所高校为协办单位，是目前国内数学教育领域最高层次的学术性刊物. 《学报》现为"全国中文核心期刊"、"中国科技核心期刊"和"RCCSE中国核心学术期刊(A)". 被中国科技论文统计源期刊、中国学术期刊综合评价数据库、中国学术期刊(光盘版)、中国期刊网、中国数学文摘、中国数学文献数据库、美国《数学评论》(MR)、德国《数学文摘》(ZBl)、中国人民大学报刊复印资料收录.

《学报》宗旨：服务于中小学数学教育改革及高等数学课程改革，倡导数学教育科学学术争鸣与评论，推动国内外数学教育学术交流，建构中国数学教育理论，反映国内外数学教育实践与改革的新成果，发挥对我国数学教育研究与实践的指导作用.

主要栏目：数学教育概论、争鸣与评论、现代教育技术与数学教学、调查与实验、比较数学教育、数学教育改革以及不定期开设密切贴近数学教育改革实践的专栏.

《学报》倾力将用得上的先进理论、可借鉴的国内外数学教育改革经验，带有启迪性的学术争鸣，中小学数学教改的丰硕成果，前瞻性的中小学及高等数学教育改革理念与实证性研究结论奉献给有志于数学教育事业的广大中小学、大学数学教师及数学教育科研工作者.

《数学教育学报》为双月刊，104页，大16开，全年订价60元.

欢迎有志于数学教育科研及数学教改的广大中小学数学教师、高等院校从事数学教育教学、科研及理论工作者到当地邮局订阅或向编辑部邮购. 欢迎新老读者踊跃投稿.

邮局邮发代号：6-132

邮购地址：天津市西青区宾水西道延长线393号天津师范大学129信箱《数学教育学报》编辑部

邮政编码：300387 电话：022-23766679
E-mail: sxjyxbbjb@163.com

(上接第11-21页)

3) 的证明方法与2)的证明完全类同. 所以，当$x<0$且n为偶数时，$f_n(x)$在区间$(-\infty,-1)$单调递减，在区间$(-1,0)$单调递增，值域为$[1,+\infty)$.

定理成立.

四、体会与认识

通过对函数$f_n(x)=x^n+x^{n-1}+\cdots+x+1+\frac{1}{x}+\cdots+\frac{1}{x^{n-1}}+\frac{1}{x^n}$的图像与性质的研究，我们发现，借助图形计算器，可以让我们在对抽象的函数研究时获得具体、直观的大致图像，有利于我们从特殊情形出发，归纳、猜测函数的一般性质. 通过严格的证明，获得函数$f_n(x)$的单调性和值域，体会了数学探究与学习的乐趣，其过程既充满挑战，也充满诱惑与期待. 利用图形计算器，开展"尝试—归纳—猜想—论证"的研究，可以帮助我们提高数学研究与学习的效能，避免在研究过程中迷失方向.

发现问题并解决问题，是数学探索与学习的基本途径，让我们共同努力，把数学学习变成探索与研究的乐园.

编后漫笔

陈建功先生提到的一件数学教育史实

张奠宙　赵小平

20世纪初的培利运动，固然使得数学教育挣脱了《几何原本》高度形式化的束缚，但是也产生了否定数学教育思维价值的倾向．在美国有许多教育界人士反对在中学学习日常生活需要以外的数学．我国著名数学家陈建功先生，在"二十世纪的数学教育"(《中国数学杂志》1952年2月)的著名论文中，对20世纪初的美国数学教育曾有如下的评论：

哥仑比亚大学教育学教授司内屯竟这样说："消费者的数学——算术的一部分——自然人人所必需不可以省略，但是中学校的代数和几何，未必人人所必需，不必作为正科，应改为随意科(选修课)．至于数学的陶冶价值，几乎无穷小"．

另外一位哥仑比亚大学教授D.E.司密司反对这种观点，他说："教育家中，要驱逐代数学于中学校外的，大有其人，但是这些破坏主义的煽动家根本是反动的，现在已经没有力量了"……．

我们于此可以断言：美国数学教育的特色，是在培养"小市民性"．美国的数学教科书，是富于小市民的实用性和学习心理的色彩．所以美国没有一本数学教科书是数学专门的人写的，著者大多是教育工作者或是心理学者．

仔细寻味，这些只认可"消费者数学"主张与杜威的实用主义教育观念异曲同工，按照杜威"教育即生活"的理念，凡不能和社会生活相联系的数学内容，就可以不学．所幸的是，"消费者数学"的数学教育观，没有太多地影响我国，1911－1949年间的中国数学教育，由数学家出身的数学教育家，如傅种孙等发挥着主导作用．1949年以后，华罗庚、苏步青、关肇直等著名数学家都直接参与中小学数学教育的改革与建设．至于今天，我们当然希望不要重蹈美国当年"消费者数学"的覆辙．

~~~~~~

(上接第11－41页)

至n条，能否作相对应的正五边形，正六边形，正n边形？或者能否作矩形，长和宽成给定的比例？同样对同心圆也可以增加个数，能否作对应的正n边形？诸如此类的问题还有很多，平面几何中作图的更多宝藏正等着我们去挖掘．

参考文献

[1] 董入兴．值得关注的2007年高考中一对探索创新"姐妹题"[J]．中学数学教学，2007(6)：52－53.

数学教学
SHU XUE JIAO XUE
2012年第11期(总第303期)
名誉主编：张奠宙
主　　编：赵小平
常务副主编：忻重义
发行范围：公　开
电　　话：021－62232712

主管单位：中华人民共和国教育部
主办单位：华东师范大学
出　　版：上海《数学教学》杂志社
邮政编码：200062(上海中山北路3663号)
广告许可证：3100720050001
印　　刷：华东师范大学印刷厂
国内总发行：上海市邮政局报刊发行局
国内订阅：全国各邮电局
电子信箱：sxjxzz@math.ecnu.edu.cn

定价：5.50元　国内统一连续出版物号：CN31－1024/G4　每月12日出版　代号：4－357
~~~~~~